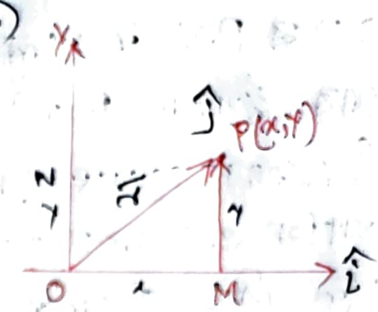
component of vector in two dimension :
(দ্বিমাত্ৰিক জ্যামিতিত ভেক্টৰৰ উপাংশ :)



P(x,y) বিন্দুটো লোৱা হ'ল। ইয়াত O মূলবিন্দু $OM = x$, $PM = y$.
ধৰা হ'ল OX ৰ দিশত একক ভেক্টৰ $\hat{i}$. আৰু OY ৰ দিশত একক ভেক্টৰ $\hat{j}$.
অৰ্থাৎ $\vec{OM} = x\hat{i}$, $\vec{ON} = y\hat{j}$, $\vec{OP} = \vec{r}$

এতিয়া $\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}$

$$\Rightarrow \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}.$$

পাইথাগোৰাচৰ সূত্ৰৰ পৰা $OP^2 = OM^2 + MP^2$

$$\Rightarrow OP^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow OP = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$$ ($|\vec{r}|$ = $\vec{r}$ ৰ মাপাংক)

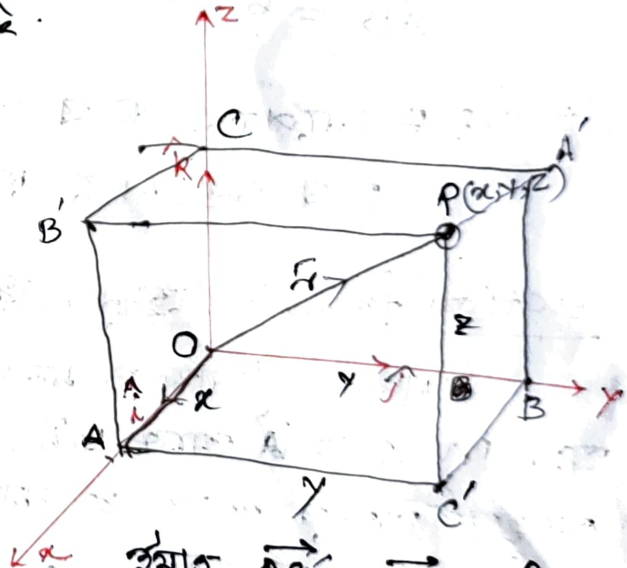
Component of vectors in three dimension
(ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানাংক জ্যামিতিত ভেক্টৰ উপাংশ)

P(x,y,z) বিন্দুটো লোৱা হ'ল। ধৰা হ'ল OX, OY, OZ ৰ দিশত একক ভেক্টৰ যথাক্ৰমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ আৰু $\hat{k}$ । O মূলবিন্দু, $\vec{OA} = x$, $OB = y$, আৰু $OC = z$. গতিকে,
$\vec{OA} = x\hat{i}$, $\vec{OB} = y\hat{j}$, $OC = z\hat{k}$.

$\cancel{\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{BC'} + \vec{C'P}}$
$\cancel{= \vec{PC'} + \vec{C'A} + \vec{AO}}$

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AC'} + \vec{C'P}$$
$$= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$
$$= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}.$$

Thus $\vec{r} = xi + yj + zk$.



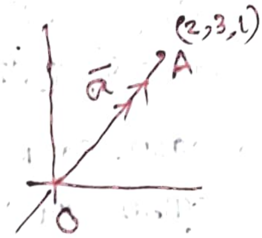
ইয়াত $\vec{AC'} = \vec{OB} = y\hat{j}$
$\vec{C'P} = \vec{OC} = z\hat{k}$

Note : ত্ৰিমাত্ৰিক উপাংশক দ্বিমাত্ৰিক উপাংশ প্ৰণালীৰ extended ৰূপ হিচাপে বিবেচনা কৰিব পৰা যায়।
$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ হ'লে

x, y, z ক $\vec{r}$ ৰ স্কেলাৰ উপাংশ বা অদিশ উপাংশ বোলে
$x\hat{i}, y\hat{j}, z\hat{k}$ ক $\vec{r}$ ৰ ভেক্টৰ " " সদিশ " "

Note একক ভেক্টৰ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ক i, j, k হিচাপেও লিখা হয়।

Ex. এটা ভেক্টৰ $\bar{a}$ দিয়া আছে যাতে $\bar{a} = 2i + 3j + k$. $\bar{a}$ ৰ দিশত একক ভেক্টৰ $\hat{a}$ উলিওৱা।



Sol^n: ইয়াত $\bar{a} = 2i + 3j + k$.

∴ মাপাংক $|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}$

$= \sqrt{14}$

$$\therefore \hat{a} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{2i+3j+k}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}i + \frac{3}{\sqrt{14}}j + \frac{1}{\sqrt{14}}k.$$

Ex $\vec{a} = 2i + 2j - 5k$ আৰু $\bar{b} = 2i + j + 3k$ ভেক্টৰ দুটাৰ যোগফলৰ দিশত থকা একক ভেক্টৰটো লিখা।

Sol^n $\vec{a} + \vec{b} = (2+2)i + (2+1)j + (-5+3)k$

$= 4i + 3j - 2k$.

ইয়াৰ মাপাংক $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

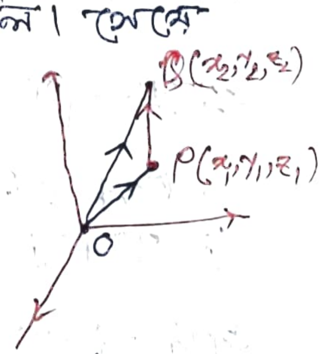
∴ $\vec{a} + \vec{b}$ ৰ দিশত একক ভেক্টৰ,

5 একক $= \dfrac{4i + 3j - 2k}{\sqrt{29}} = \dfrac{4}{\sqrt{29}}i + \dfrac{3}{\sqrt{29}}j - \dfrac{2}{\sqrt{29}}k$.

দুটা বিন্দু সংযোগী ভেক্টৰ:

ধৰাহ'ল $P(x_1, y_1, z_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2, z_2)$ অনুবৰ্তী দুটা বিন্দু। মূলবিন্দু O ৰ স্থানাংক (0,0,0) লোৱা হ'ল। তেন্তে ~~অৱস্থান ভেক্টৰ~~ $\vec{OP} = x_1 i + y_1 j + z_1 k$

$\vec{OQ} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$.



OPQ ত্ৰিভুজৰ পৰা পাওঁ

$\vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OQ}$

$\Rightarrow \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$

$= (x_2 i + y_2 j + z_2 k) - (x_1 i + y_1 j + z_1 k)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{PQ} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)k}$$

মাপাংক হ'ব $|\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

দিশ কোণ, দিশাংক, দিশানুপাত-

ধৰা হওক ভেক্টৰ $\vec{OP}$ যে স্থানাংক অক্ষ OX, OY আৰু OZ ৰ লগত ক্ৰমে α, β, γ কোণ কৰিছে। α, β, γ ক দিশ কোণ (Direction angle) বোলা হয়। α, β, γ ই $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi$ চৰ্তটো মানি চলে।

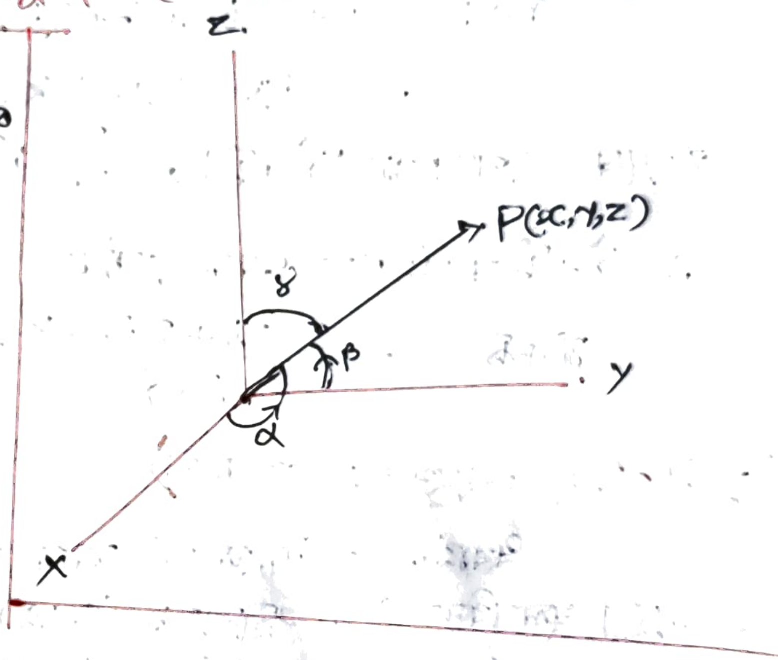
* $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ক ভেক্টৰ $\vec{OP}$ ৰ দিশাংক (direction cosine) বোলা হয়। সাধাৰণতে ইহঁতক l, m, n ৰে সূচিত কৰা হয়। অৰ্থাৎ $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$. আমাৰ হাতে,
* $-l = \cos(\pi-\alpha)$, $-m = \cos(\pi-\beta)$ আৰু $-n = \cos(\pi-\gamma)$ ক $\vec{PO}$ ভেক্টৰৰ দিশাংক হিচাপে লব পাৰি।

ধৰা হল $\vec{OP}$ ভেক্টৰৰ দিশাংক l, m, n আৰু a, b, c তিনিটা সংখ্যা যাতে $\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$ । এনেক্ষেত্ৰত a, b, c সংখ্যা কেইটাক $\vec{OP}$ ৰ দিশানুপাত (direction ratio) বোলা হয়।

X অক্ষৰ দিশাংক:

6 x অক্ষই অক্ষ তিনিটাৰ লগত ক্ৰমে $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ কোণ কৰে। গতিকে দিশাংক হ'ব $\cos 0, \cos 90°, \cos 90°$ $\equiv 1, 0, 0$

একেদৰে y আৰু z অক্ষৰ দিশাংক হ'ব $0,1,0$ আৰু $0,0,1$.



প্ৰয়োজনীয় সূত্ৰ: $\boxed{l^2+m^2+n^2=1}$

Q. তলৰ ভেক্টৰ কেইটাৰ দিশাংক উলিওৱা।

(i) $2i+2j-k$ (ii) $6i-2j-3k$ (iii) $3i-4k$

Soln: $\vec{a} = 2i+2j-k$

$\vec{a}$ ৰ দিশত একক ভেক্টৰ $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$$= \frac{2i+2j-k}{|2i+2j-k|}$$

$$= \frac{2i+2j-k}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}$$

$$= \frac{2i+2j-k}{3}$$

$$= \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j + \left(-\frac{1}{3}\right)k$$

$\therefore$ দিশাংক সমূহ $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$

(ii) $\bar{a} = 6i - 2j - 3k$

$\Rightarrow \hat{a} = \dfrac{6i - 2j - 3k}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2}}$

$= \dfrac{6i - 2j - 3k}{7}$ ∴ উলিয়াবলগা দিশাংক $\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}$.

$= \frac{6}{7} i - \frac{2}{7} j - \frac{3}{7} k$

(iii) $\bar{a} = 3i + 0j - 4k$

$\Rightarrow \hat{a} = \dfrac{3i + 0j - 4k}{\sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2}}$

$= \dfrac{3i + 0j - 4k}{5}$ ∴ দিশাংক : $\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}$

$= \frac{3}{5} i + 0j - 4k$

Q.① $\hat{i} - \hat{j} + k$ ভেক্টৰে অক্ষৰলগত কৰা কোণ নিৰ্ণয় কৰা।

7 Soln $\bar{a} = i - j + k$

$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} i - \frac{1}{\sqrt{3}} j + \frac{1}{\sqrt{3}} k.$

∴ দিশাংক $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$.

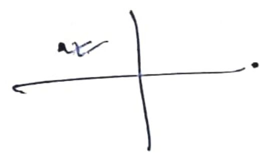
∴ x অক্ষৰ লগত কৰা কোণ $\cos^{-1}(1/\sqrt{3})$,

y " " " $\cos^{-1}(-1/\sqrt{3})$

z " " " $\cos^{-1}(1/\sqrt{3})$

(ii) $j - k$

$\Rightarrow \dfrac{0i + j - k}{\sqrt{2}}$



∴ দিশাংক $0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}$

∴ x অক্ষত লগত কৰা কোণ $\cos^{-1}(0) = 1$

y " " " " $\cos^{-1}(1/\sqrt{2}) = 45^\circ$

z " " " " $\cos^{-1}(-1/\sqrt{2}) = (\pi - \pi/4) = \frac{3\pi}{4}$.

(iii) $\bar{a} = i + j + k$

$\hat{a} = \dfrac{i + j + k}{\sqrt{3}}$

∴ দিশাংক $1/\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1/\sqrt{3}$

∴ অক্ষৰ লগত কৰা কোণ $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}), \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}), \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$.

— x —

৪. $\bar{a} = i+2j-3k$, $\bar{b} = 2i+4j+9k$, হলে $\bar{a}+\bar{b}$ ৰ সমান্তৰাল ভাবে থকা একক ভেক্টৰ উলিওৱা।

Sol^n ~~$\bar{a}+\bar{b}$ ৰ~~ ধৰা হ'ল $\bar{c} = \bar{a}+\bar{b} = 3i+6j+6k$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 36 \\ 9 \\ \hline 81 \end{array} \quad 2$$

$$\Rightarrow \hat{c} = \frac{3i+6j+6k}{\sqrt{3^2+6^2+6^2}}$$

$$= \frac{3i+6j+6k}{9} = \frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{2}{3}k.$$

∴ একক ভেক্টৰটো $\frac{1}{\sqrt{3}}(i+2j+2k)$ ।

Product of two vectors
দুটা ভেক্টৰৰ পূৰণ :

ভেক্টৰৰ পূৰণ দুই ধৰণৰ (i) স্কেলাৰ পূৰণ বা ডট পূৰণ বা অদিশ পূৰণ আৰু (ii) ভেক্টৰ পূৰণ বা সদিশ পূৰণ বা ক্রচ (cross) পূৰণ।

1. অদিশ পূৰণ :

ধৰা হ'ল $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ দুটা ভেক্টৰ ৰাশি। তেন্তে ক্ষেত্ৰত $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ ডট পূৰণক $\vec{a}\circ\vec{b}$ হিচাপে লিখা হয় আৰু $\vec{a}\circ\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, ~~ইয়াত~~

ইয়াত θ হ'ল $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ মাজৰ কোণ $0 \le \theta \le \pi$..

Note 1.
$\bar{a} = 0$ হ'লে, $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$
$\bar{b} = 0$,, $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$
$\theta = \frac{\pi}{2}$,, $\bar{a}\cdot\bar{b} = ab\cos 90^\circ = 0$.
$\theta = 0^\circ$,, $\bar{a}\cdot\bar{b} = ab\cos 0^\circ = ab$.

Note 2. (i) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ এটা স্কেলাৰ ৰাশি

(ii) $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ পৰস্পৰ লম্ব হ'লে $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$.

(iii) $\theta = \pi$ হ'লে $\bar{a}\cdot\bar{b} = ab\cos\pi = -ab$.

Note 3. ধৰা হ'ল $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ হ'ল x, y, আৰু z অক্ষৰ দিশত একক ভেক্টৰ। তেন্তে

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = k\cdot k = 1.1.\cos 0^\circ = 1\cdot 1\cdot 1 = 1.$$
$$i\cdot j = j\cdot k = k\cdot i = 1\cdot 1\cdot \cos 90^\circ = 1\cdot 1\cdot 0 = 0.$$

Note 4 ধৰা হ'ল $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ মাজৰ কোণ θ.

তেন্তে $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{ab}\right)$$

অৰ্থাৎ ভেক্টৰ দুটা দিয়া থাকিলে সিহঁতৰ মাজৰ কোণ উলিয়াব পৰা যায়।

Note 5 স্কেলাৰ পূৰণ commutative বা ক্রমবিনিমেয়

অৰ্থাৎ $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.

Note 6 (i) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (বিতৰণ বিধি)

~~(ii) $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})(\lambda\vec{a})(\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$~~

(ii) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$.

~~Note~~:

Q. ধৰাহ'ল $\hat{i}, \hat{j}$ আৰু $\hat{k}$ ৰ দিশত ভেক্টৰৰ উপাংশসমূহ দিয়া আছে। অৰ্থাৎ $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$.

আৰু $\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$.

এনেক্ষেত্ৰত $\vec{a}\cdot\vec{b}$ উলিয়াব লাগে।

Soln. আমি একক ভেক্টৰৰ নিম্নোক্ত ধৰ্ম প্ৰয়োগ কৰিম।

$$i\cdot i = j\cdot j = k\cdot k = 1$$

$$\& \quad i\cdot j = j\cdot k = k\cdot i = 0.$$

এতিয়া $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1 i + a_2 j + a_3 k)\cdot(b_1 i + b_2 j + b_3 k)$

$$= a_1b_1\, i\cdot j + a_1b_2\, i\cdot j + a_1b_3\, i\cdot k$$
$$+ a_2b_1\, j\cdot i + a_2b_2\, j\cdot j + a_2b_3\, j\cdot k$$
$$+ a_3b_1\, k\cdot i + a_3b_2\, k\cdot j + a_3b_3\, k\cdot k$$

$$= a_1b_1 + 0 + 0$$
$$+ \cancel{a_2b_1} + a_2b_2 + 0$$
$$+ 0 + 0 + a_3b_3$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

গতিকে দুটা ভেক্টৰৰ ডট পূৰণ মানে সিহঁতৰ উপাংশৰ পূৰণৰ যোগফল।