Q. $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$ হ'ব যদি আৰু যদিহে $\vec{a}, \vec{b}$ ভেক্টৰ দুটা পৰস্পৰ লম্ব (Orthogonal) হয়। $(\vec{a} \neq \vec{b})$

Sol^n. ধৰিলোঁ

$$|\bar{a}+\bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2$$

$$\Rightarrow \cancel{|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+ \text{২ab}}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b}) = |\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2$$

$$\Leftrightarrow \bar{a}\cdot\bar{a} + \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{b}\cdot\bar{a} + \bar{b}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\bar{a}|^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{b} + |\bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2 \quad (\because \bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a})$$

$$\Leftrightarrow 2\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{a}\cdot\bar{b} = 0$$

14 $$\Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}.$$

Proved

Q. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$; $|\vec{c}|=7$ আৰু $\vec{a}, \vec{b}$ ৰ মাজৰ কোণ θ হ'লে θ ৰ মান উলিওৱা।

Sol^n. দিয়া আছে

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \bar{a}+\bar{b} = -\bar{c}$$

$$\Rightarrow |\bar{a}+\bar{b}| = |-\bar{c}| = |\bar{c}|$$

$$\Rightarrow |\bar{a}+\bar{b}|^2 = |\bar{c}|^2$$

$$\Rightarrow (\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b}) = |\bar{c}|^2$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\bar{b}||\bar{b}| = |\bar{c}|^2$$

$$\Rightarrow |\bar{a}|^2 + 2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta + |\bar{b}|^2 = |\bar{c}|^2$$

$$\Rightarrow 9 + 2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta + 25 = 49$$

$$\Rightarrow \cancel{\text{Hence}}\ 2\times3\times5\cos\theta = 15$$

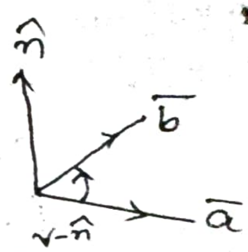
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \pi/3.$$

Ans

2. Vector Cross Product

ভেক্টৰৰ ক্ৰছ পূৰণ।



Defn: $\vec{a}, \vec{b}$ দুটা ভেক্টৰ হ'লে

$$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$$

য'ত θ হ'ল $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ মাজৰে কোণ $0\le\theta\le\pi$, $\hat{n}$ এটা একক ভেক্টৰ যি $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ থকা সমতল সমৰ লম্বৰ দিশত ~~থাকে~~ এনেভাৱে থাকে যে $\vec{a}, \vec{b}, \hat{n}$ যে এটা সোঁহতীয়া প্ৰণালী গঠন কৰে।

[$\hat{n}$ অৱস্থানৰ পৰা চালে দেখা যাব যে কোনটো $\vec{a}$ ৰ পৰা $\vec{b}$ লৈ ঘড়ীৰ কাটাৰ বিপৰীত দিশত ঘূৰিছে এনে ক্ষেত্ৰত স্ক্ৰু এটা নিজৰ গাৰ দিশত আহি যায়, আৰু $\vec{b}$ ৰ পৰা $\vec{a}$ ৰ ফালে আহিলে স্ক্ৰুটো নিজৰ গাৰ বিপৰীত দিশত গুচি যায়]

15

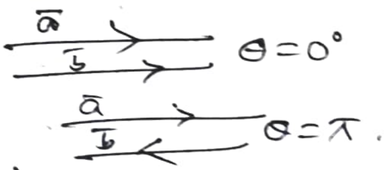
পৰ্য্যৱেক্ষণ:

(1) $\vec{a}\times\vec{b}$ টো এটা ভেক্টৰ ৰাশি (মন কৰা $\vec{a}\cdot\vec{b}$ স্কেলাৰ)

(2) $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ দুয়োটা অশূন্য হ'লে আৰু $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ হ'ল $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ সমান্তৰাল হ'ব।

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \sin\theta\,\hat{n}=\vec{0}$$



গতিকে $\hat{n}$ ৰ দিশত

$$\Rightarrow \sin\theta=0$$

$$\Rightarrow \theta = 0 \text{ অথবা } \pi \qquad (\because \sin 0 = 0 = \sin\pi)$$

অৰ্থাৎ $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ সমান্তৰাল। একেদিশত অথবা বিপৰীত দিশত

(3) $\theta=\frac{\pi}{2}$ হ'লে $\sin\frac{\pi}{2}=1$

$$\therefore \cancel{|\vec{a}|}\ \vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\,\hat{n}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$$

(4) ধৰা হ'ল x, y আৰু z অক্ষৰ দিশত $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ একক ভেক্টৰ। এনে ক্ষেত্ৰত

$\hat{i}\times\hat{i} = 1.1\sin 0^\circ = \vec{0}$ একেদৰে $\hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0}$

$\hat{i}\times\hat{j} = 1.1\sin 90^\circ\,\hat{n} = 1.1.1.\hat{k} = \hat{k}$ ($\hat{k}$, ভেক্টৰ যে $\hat{i}$ আৰু $\hat{j}$ ৰ লম্ব)

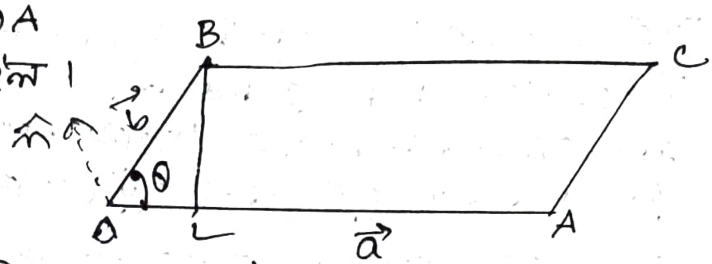
একেদৰে $\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$

(5) $\sin\theta = \cancel{\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{\ }}\ \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

Geometrical Interpretation of $\vec{a}\times\vec{b}$.

ধৰা হওক O বিন্দুৰ পৰা $\vec{OA} = \vec{a}$ আৰু $\vec{OB} = \vec{b}$ যিকোনো দুটা ভেক্টৰ আৰু θ সিহঁতৰ মাজৰ কোণ। OA আৰু OB বাহু দুটাক সন্নিহিত বাহু হিচাপে লৈ OACB সামান্তৰিকটো সম্পূৰ্ণ কৰা হ'ল $BL \perp OA$ আঁকা হ'ল।



জ্যামিতিৰ পৰা পাওঁ $BL = OB\sin\theta = |\vec{b}|\sin\theta$.

এতিয়া, $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$

$= |\vec{a}|\,BL\,\hat{n}$

$= |\vec{OA}|\,|BL|\,\hat{n}$

16 = ভূমি × উন্নতি $\hat{n}$

= (OACB সামান্তৰিকৰ কালি) $\hat{n}$

∴ = OACB সামান্তৰিকৰ ভেক্টৰ কালি

অৰ্থাৎ $\vec{a}\times\vec{b}$ যে জ্যামিতিক ভাৱে $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ক সন্নিহিত বাহু হিচাপে লৈ গঠন কৰা সামান্তৰিকৰ ~~ক~~ সদিশ কালিক বুজায় আৰু ইয়াৰ দিশ $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ থকা সমতলখনৰ লম্ব দিশত থাকে।

Note: $\vec{OA}$ আৰু $\vec{OB}$ ক সন্নিহিত বাহু হিচাপে লৈ আঁকা ত্ৰিভুজৰ কালি

$= \frac{1}{2}$ × একে পদ্ধতিৰে গঠন কৰা সামান্তৰিক OACB ৰ কালি।

$= \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

∴ OAB ৰ কালি $= \frac{1}{2}\times|\vec{OA}\times\vec{OB}|$.

—x—

ধৰ্ম:

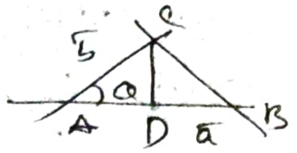
(1) ভেক্টৰ পূৰণ ক্ৰমবিনিময় নহয়। কাৰণ

$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$.

যিহেতু ইহঁতৰ দিশ পৰস্পৰ বিপৰীত দিশত হয়।

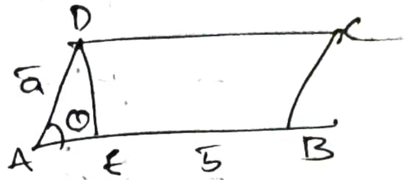
(2) $j \times i = -k$, $k \times j = -i$ আৰু $i \times k = -j$

(3) ত্ৰিভুজ ABCৰ কালি



$$= \frac{1}{2} AB \cdot CD$$
$$= \frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \sin\theta$$
$$= \frac{1}{2} |\bar{a}| |\bar{b}| \sin\theta$$
$$= \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}|$$

(4) সামান্তৰিকৰ কালি



ABCD ৰ কালি $= AB \cdot DE$

কিন্তু $AB = |\bar{b}|$ আৰু $DE = AD \sin\theta$

$\Rightarrow AB = |\bar{b}|$,, $DE = |\bar{a}| \sin\theta$

17 $\therefore AB \cdot DE = |\bar{b}||\bar{a}| \sin\theta$

$= |\bar{a} \times \bar{b}|$ (ভেক্টৰ পূৰণৰ সংজ্ঞামতে).

(5) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$ (বিতৰণ বিধি)

$\lambda (\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda \bar{b})$

(6) IMPORTANT.

$$\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$
$$\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

হ'লে $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ (নিৰ্ণায়ক).

নিৰ্ণায়কটোৰ প্ৰথম শাৰীত একক ভেক্টৰ ক্ৰমে i, j আৰু k দ্বিতীয় আৰু তৃতীয় শাৰীত যথাক্ৰমে a আৰু b ৰ উপাংশ বহুৱাব। এনেকৈ সকলো কাৰিৰ পৰা নাযায়।

Proof $\bar{a} \times \bar{b} = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k)$

$$= a_1 b_1 \, i \times i + a_1 b_2 \, i \times j + a_1 b_3 \, i \times k$$
$$+ a_2 b_1 \, j \times i + a_2 b_2 \, j \times j + a_2 b_3 \, j \times k$$
$$+ a_3 b_1 \, k \times i + a_3 b_2 \, k \times j + a_3 b_3 \, k \times k$$

এতিয়া $i \times i = j \times j = k \times k = 0,\ i \times j = k,\ i \times k = -j$

$j \times i = -k,\ j \times k = i,\ k \times i = j,\ k \times j = -i$

অভেদ কেইটা ব্যৱহাৰ কৰি পাম

$$\bar{a} \times \bar{b} = (0 + a_1 b_2 k - a_1 b_3 j)$$
$$- a_2 b_1 k + 0 + a_2 b_3 i$$
$$+ a_3 b_1 j - a_3 b_2 i + 0$$
$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1) k + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_2 b_3 - a_3 b_2) i$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$
$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

১৪ Ex. $\vec{a} = 2i + j + 3k,\ \bar{b} = 3i + 5j - 2k$ হ'লে $|\bar{a} \times \bar{b}|$ ৰ মান উলিওৱা।

Soln $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

$$= i(1 \times (-2) - 5 \times 3) - j(2 \times (-2) - 3 \times 3) + k(2 \times 5 - 3 \times 1)$$
$$= i(-2 - 15) - j(-4 - 9) + k(10 - 3)$$
$$= -17 i + 13 j + 7k$$
$$\therefore |\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{(-17)^2 + (13)^2 + 7^2}$$
$$= \sqrt{507}.$$

Ex $\vec{a} = (i + 3j - 2k) \times (-i + 3k)$ উলিওৱা -

Soln $\bar{a} = (i + 3j - 2k) \times (-i + 0j + 3k)$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$= (9-0)i - (3-2)j + (0+3)k$

$= 9i - j + 3k$.

Q. যদি $\vec{r} = xi + yj + zk$ তেন্তে $(\vec{r} \times i)\cdot(\vec{r}\times j) + xy$ ৰ মান উলিওৱা।

Soln (ইয়াত ডট আৰু ক্ৰছ পূৰণ মিহলি হৈ আছে)

$\vec{r} \times i = (xi + yj + zk) \times i$

$= x(i \times i) + y(j \times i) + z\, k \times i$

$= x \times \vec{0} - yk + zj$

$= z\hat{j} - y\hat{k}$

$\vec{r} \times j = (xi + yj + zk) \times j$

$= x(i \times j) + y(j \times j) + z(k \times j)$

19 $= xk - zi$

$\therefore (\vec{r} \times i) \times (\vec{r} \times j) = (zj - yk)\cdot(xk - zi)$

$= zx(j\cdot k) - z^2(j\cdot i) - yx(k\cdot k) - ykz(k\cdot i)$

$= -yx \quad (\because i\cdot j = j\cdot k = k\cdot i = 0)$

$\therefore$ প্ৰদত্ত ৰাশি $= -yx + xy$

$= -xy + xy$

$= 0$. Ans.

Q. Find a unit vector (একক ভেক্টৰ) যিটো $\vec{a}+\vec{b}$ আৰু $\vec{a}-\vec{b}$ উভয়ৰে ওপৰত লম্ব। দিয়া আছে যে $\vec{a} = i + j + k$, $\vec{b} = \hat{i} + 2j + 3k$.

Soln $\vec{a} + \vec{b} = (i + j + k) + (i + 2j + 3k) = 2i + 3j + 4k$

$\vec{a} - \vec{b} = (i + j + k) - (i + 2j + 3k) = 0i - j - 2k$. $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}$ ৰ উভয়ৰে ওপৰত লম্ব।

ধৰা হ'ল $\vec{n}$ ভেক্টৰটো

$\therefore \vec{n} = (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$= i(-6+4) - j(-4-0) + k(-2-0)$

$= -2i + 4j - 2k$

∴ একক ভেক্টৰ $\hat{n} = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$

$= \frac{-2i+4j-2k}{|-2i+4j-2k|}$

$\sqrt{2^2+4^2+2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$= \frac{-2i+4j-2k}{2\sqrt{6}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{6}}i + \frac{2}{\sqrt{6}}j - \frac{1}{\sqrt{6}}k$ Ans.

মান কৰা $\hat{n} = -\frac{\sqrt{6}}{6}i + \frac{\sqrt{6}}{3}j - \frac{\sqrt{6}}{6}k$.

২৫ হিচাপ- নিয়মটোৰ বাবে।

Q. $i\cdot(j\times k) + j\cdot(i\times k) + k\cdot(i\times j) = ?$

Soln: $i\cdot(j\times k) + j\cdot(i\times k) + k\cdot(i\times j)$

$= i\cdot i + j\cdot(-j) + k\cdot k$

$= 1 - 1 + 1$

$= 1$ Ans.

Q. $\bar{a} = 2i+3j-k$ আৰু $\bar{b} = i-2j+k$ ৰ লব্ধ ভেক্টৰৰ দিশত এটা একক ভেক্টৰ উলিওৱা।

Soln

$\bar{a}$ আৰু $\bar{b}$ ৰ লব্ধ ভেক্টৰ

$\bar{a}+\bar{b} = 3i + j + 0k$

$\Rightarrow |\bar{a}+\bar{b}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow \bar{a}+\bar{b}$ ৰ দিশত একক ভেক্টৰ হ'ব

$\widehat{(a+b)} = \frac{3i+j}{\sqrt{10}}$

$= \frac{3\sqrt{10}i + \sqrt{10}j}{10}$

নতুন ভেক্টৰটো 5 একক বিশিষ্ট। গতিকে এইটো হ'ব

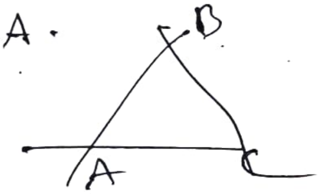
$$5\widehat{(a+b)} = 5 \times \frac{3\sqrt{10}\,i + \sqrt{10}\,j}{10}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{10}\,i + \frac{1}{2}\sqrt{10}\,j$$

২১ Note: $\sqrt{\cdot}$ থকা ৰাশি থকাৰ হৰ হিচাপে ৰাখিব নালাগে। সম পৰিমাণৰ $\sqrt{\ }$ ৰে হৰ আৰু লৱক পূৰণ কৰি লৈ ৰাশিটো নতুনকৈ সজাব লাগে।

Ex A (1, 1, 1), B (1, 2, 3), C (2, 3, 1) শীৰ্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্ৰিভুজৰ কালি উলিওৱা।

Soln



$$\vec{AB} = \text{p.v of } B - \text{অৱস্থান ভেক্টৰ of } A.$$

$$= (i+2j+3k) - (i+j+k)$$

$$= j + 2k.$$

$$\vec{AC} = (2i+3j+k) - (i+j+k)$$

$$= i + 2j$$

$\therefore$ কালি $= \frac{1}{2} \times |\vec{AB} \times \vec{AC}|$ (|.| টোৰে mode বুজাইছে)

এতিয়া, $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ (এইটো নিৰ্ণায়ক)

$$= i(0-4) - j(0-2) + k(0-1)$$

$$= -4i + 2j - k$$

$\therefore$ ত্ৰিভুজৰ কালি $= \frac{1}{2} \times |-4i + 2j - k|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{16+4+1}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{21}.$$

Answer.

—— x ——