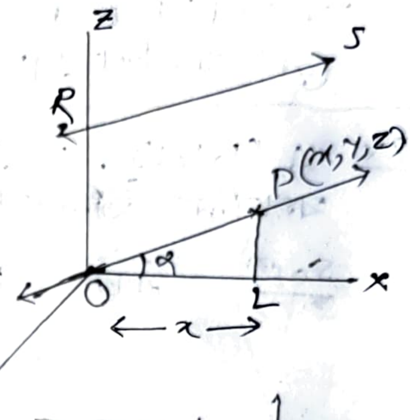
3.D

ত্ৰিমাত্ৰিক জ্যামিতি

1. দিশাংক তিনিটাৰ মাজৰ সম্পৰ্ক :

প্ৰমাণ কৰা যে, $l^2+m^2+n^2=1$

ধৰা হ'ল অন্তৰীক্ষত RS এটা ভেক্টৰ যাৰ দিশাংক সমূহ ক্ৰমে l, m, n. মূলবিন্দুৰ মাজেৰে $\vec{RS}$ ভেক্টৰৰ সমান্তৰালকৈ $\vec{OP}$ ভেক্টৰ লোৱা হ'ল। ধৰা হ'ল P ৰ স্থানাংক (x, y, z). P ৰ পৰা x অক্ষৰ ওপৰত PL লম্ব টনা হ'ল।



ধৰা হ'ল $OP = r \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

এতিয়া, $\cos\alpha = \frac{OL}{OP} = \frac{x}{r}$

$$\Rightarrow l = \frac{x}{r}$$

$$\Rightarrow x = lr$$

একেদৰে দেখাব পাৰি যে $y = mr$, $z = nr$.

$$\therefore x^2+y^2+z^2 = l^2r^2+m^2r^2+n^2r^2$$

$$\Rightarrow r^2 = r^2(l^2+m^2+n^2)$$

$$\Rightarrow l^2+m^2+n^2 = 1.$$

প্ৰমাণিত হ'ল #

—×—

2. দিশাংক আৰু দিশানুপাতৰ মাজৰ সম্পৰ্ক :

তিনিটা ৰাশি a, b, c ক ভেক্টৰ এটাৰ দিশানুপাত বোলা হয় যদি

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = k \text{ (ধৰো)} \quad \text{—— (1)}$$

$$\Rightarrow l = ak,\ m = bk,\ n = ck \quad \text{—— (2)}$$

$$\Rightarrow l^2+m^2+n^2 = k^2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow 1 = k^2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow k = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \text{—— (3)}$$

③ ৰ পৰা k ৰ মান ②ত বহুৱালে পাও

$$l = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad m = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad n = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Note1: $P(x_1, y_1, z_1)$ আৰু $P(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডৰ দিশানুপাত $x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1$।

Note2: PQ ৰ দিশাংক,

$$\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\ \frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},\ \frac{z_2-z_1}{\sqrt{\Sigma(x_2-x_1)^2}}$$

বা

$$\frac{x_2-x_1}{\sqrt{\Sigma(x_2-x_1)^2}},\ \frac{y_2-y_1}{\sqrt{\Sigma(x_2-x_1)^2}},\ \frac{z_2-z_1}{\sqrt{\Sigma(x_2-x_1)^2}}$$

Ex একটা ভেক্টৰৰ দিশানুপাত $2, -1, -2$ হলে দিশাংকবোৰ নিৰ্ণয় কৰা।

Soln ইয়াত $r = \sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2} = 3$.

$\therefore\ l = \frac{x}{r} = \frac{2}{3},\quad y = \frac{-1}{3},\quad z = -\frac{2}{3}$

Ex. $A(-2, 4, -5)$ আৰু $B(1, 2, 3)$ হৈ যোৱা ৰেখাডালৰ দিশাংক সমূহ উলিওৱা।

Soln: দিশানুপাত হ'ব $1-(-2),\ 2-4,\ 3-(-5)$

$= 3, -2, 8$.

$\therefore AB = \sqrt{3^2+(-2)^2+8^2}$

$= \sqrt{77}$

$\therefore$ দিশাংকসমূহ, $\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{-2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$

বা $\frac{3\sqrt{77}}{77}, \frac{-2\sqrt{77}}{77}, \frac{8\sqrt{77}}{77}$

Ex দেখুওৱা যে $A(2,3,4), B(-1,-2,1), C(5,8,7)$ are collinear:

AB ৰেখাৰ দিশানুপাত $-1-2, -2-3, 1-4$

$= -3, -5, -3$.

BC ৰেখাৰ দিশানুপাত $5-2, 8-3, 7-4$

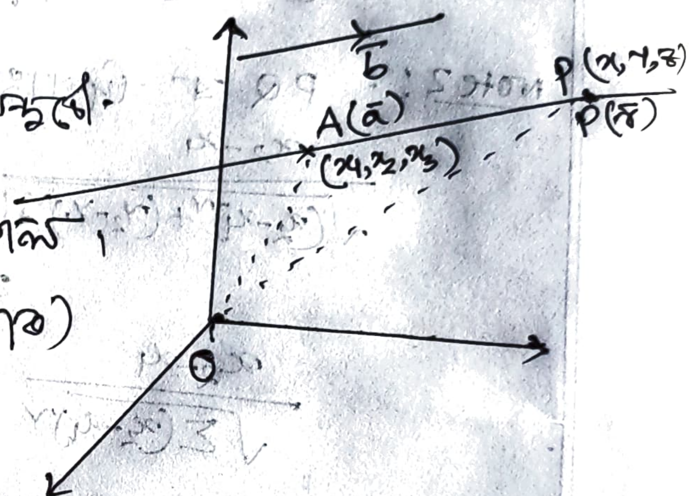
$= 3, 5, 3$

দেখা গ'ল যে, $\frac{-3}{3} = \frac{-5}{5} = \frac{-3}{3}$. সমানুপাতিক। কিন্তু B সাধাৰণ বিন্দু। গতিকে AB আৰু BC ~~[illegible]~~ যে একেডাল ৰেখা হুৱৰ। গতিকে AC

অন্তৰীক্ষত ৰেখাৰ সমীকৰণ :

1. $A(\vec{a})$ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $\vec{b}$ ভেক্টৰৰ সমান্তৰাল ভাৱে থকা ৰেখাডালৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ উলিওৱা। A বিন্দুৰ কাৰ্টেজীয় স্থানাংক (x_1, y_1, z_1) হ'লে আৰু $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ হিচাপে উপাংশত প্ৰকাশ কৰিলে কাৰ্টেজীয় সমীকৰণ নিৰ্ণয়।

Sol^n



ৰেখাডালৰ ওপৰত $P(\vec{r})$ বিন্দুটো লোৱা হ'ল। গতিকে $\vec{AP}$ আৰু $\vec{b}$ পৰস্পৰ সমান্তৰাল।

$\therefore \vec{AP} = \lambda \vec{b}$ (λ এটা স্কেলাৰ)

$\Rightarrow \vec{r} - \vec{a} = \lambda \vec{b}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}}$

এইটোৱেই ৰেখাডালৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ।

২য় অংশ. $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ আৰু $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ আৰু $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ হিচাপে লোৱা হ'ল। ইয়াত b_1, b_2, b_3 হ'ল x, y, z অক্ষৰ দিশত স্কেলাৰ উপাংশ

এতিয়া $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$

$$\Rightarrow x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k} + \lambda(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$$

$$\Rightarrow (x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k} = (\lambda b_1)\hat{i} + (\lambda b_2)\hat{j} + (\lambda b_3)\hat{k}$$

ইয়োৱা লে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ৰ সহগ তুলনা কৰি পাওঁ

$$x - x_1 = \lambda b_1,\quad y - y_1 = \lambda b_2,\quad z - z_1 = \lambda b_3$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{x - x_1}{b_1},\ \lambda = \frac{y - y_1}{b_2},\ \lambda = \frac{z - z_1}{b_3}$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{b_3} \;(= \lambda)$$

এইটোৱেই উলিয়াব লগা কাৰ্টেজীয় সমীকৰণ।

Note ৰেখাডালৰ দিশাংক l, m, n দিয়া থাকিলে আমাৰ কাৰ্টেজীয় সমীকৰণটো হ'ব $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$.

Ex. এডাল ৰেখাৰ সমীকৰণ উলিওৱা যি $i+j-2k$ ৰ দিশত থাকে আৰু $2i-j+4k$ ৰ মাজেৰে যায়।

Soln ইয়াত $\bar{a} = 2i-j+4k$, $\bar{b} = i+j-2k$.

∴ ৰেখাডালৰ সমীকৰণ $\bar{r} = \bar{a} + \lambda\bar{b}$, য'ত λ এটা অদিশ।

$\Rightarrow \bar{r} = (2i-j+4k) + \lambda(i+j-2k)$.

এইটোৱেই ৰেখাডালৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ।

কাৰ্টেজীয় ৰূপ: Put $\bar{r} = xi+yj+zk$.

∴ $xi+yj+zk = 2i-j+4k = \lambda i + \lambda j - 2\lambda k$

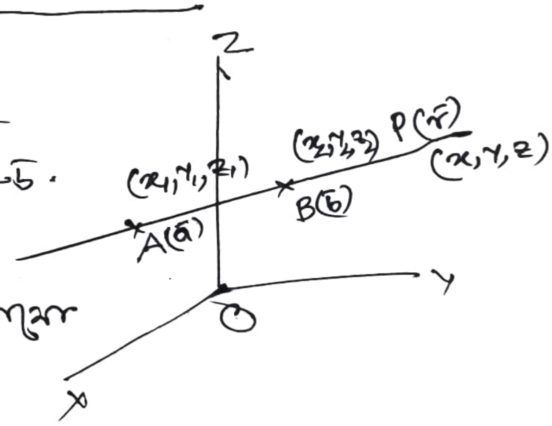
৪ $\Rightarrow (x-2)i + (y+1)j + (z-4)k = \lambda i + \lambda j - 2\lambda k$

i, j, k ৰ সহগ বোৰ তুলনা কৰি পাওঁ

$$\lambda = x-2, \quad \lambda = y+1, \quad \lambda = \frac{z-4}{-2}$$

∴ কাৰ্টেজীয় সমীকৰণ $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-2}$. Ans

দুটা বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ:



ধৰাহওক O মূলবিন্দু আৰু ৰেখাডালৰ ওপৰত A, B দুটা বিন্দু যাৰ অৱস্থান ভেক্টৰ ক্ৰমে $\bar{a}$ আৰু $\bar{b}$.

∴ $\vec{AB} = \bar{b} - \bar{a}$ —— (1)

ধৰাহওক $P(\bar{r})$ ৰেখাডালৰ যিকোনো বিন্দু।

∴ $\vec{AP} = \bar{r} - \bar{a}$ —— (2)

বিন্দু A,B,P একেডাল ৰেখাতে আছে। (

∴ $\vec{AP} = \lambda\vec{AB}$

$\Rightarrow \bar{r} - \bar{a} = \lambda(\bar{b} - \bar{a})$ —— (3)

$\Rightarrow \bar{r} = \bar{a} + \lambda(\bar{b} - \bar{a})$

Note: $\bar{r} = xi+yj+zk$, $\bar{a} = x_1 i + y_1 j + z_1 k$, $\bar{b} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$,

... আমি (3) ৰ পৰা পাওঁ ... $z - z_1$ ... (কাৰ্টেজীয় ৰূপ),