V. 6. Shortest distance between two lines in space:

অন্তৰীক্ষত থকা দুডাল ৰেখাৰ মাজৰ নিম্নতম দূৰত্ব

- সমতল জ্যামিতিত অৰ্থাৎ দ্বিমাত্ৰিক জ্যামিতিত দুডাল ৰেখা হয় সমান্তৰাল নতুবা দুয়োডালে কটাকটি কৰে। কটাকটি কৰিলে ৰেখাদুডালৰ মাজৰ নিম্নতম দূৰত্ব শূন্য হ'ব। সমান্তৰাল হ'লে সিহঁতৰ মাজৰ লম্বদূৰত্বই নিম্নদূৰত্ব হ'ব।

ত্ৰিমাত্ৰিক জ্যামিতিৰ ক্ষেত্ৰত (space) এনেধৰণৰ ৰেখা থাকে যিবোৰ সমান্তৰালো নহয় আৰু সিবোৰে কটাকটিও নকৰে। তেনে ৰেখাবোৰক Skew line (বিষম ৰেখা) বোলা হয়। দৰাচলতে এইবোৰ ৰেখা একে সমতলীয় নহয়।

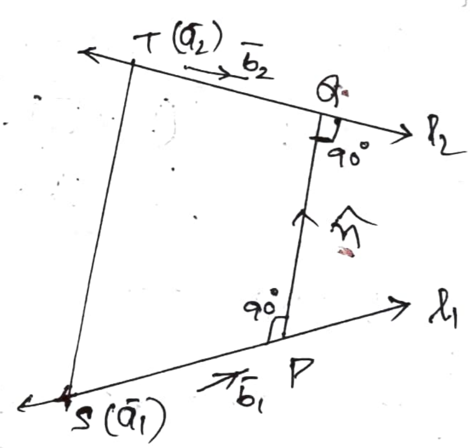
আমাৰ আলোচনাৰ মূল তত্ত্বটো হ'ল যে — দুডাল বিষম ৰেখা l_1 আৰু l_2ৰ মাজত এডাল আৰু মাত্ৰ এডালহে ৰেখা থাকিব পাৰে যি l_1 আৰু l_2 উভয়ৰে ওপৰত লম্ব। এই বিশেষ ৰেখাডালক Line of Shortest distance (ক্ষুদ্ৰতম দৈৰ্ঘ্যৰ ৰেখা) বোলা হয়।

S.D নিৰ্ণয়:

ধৰো l_1 আৰু l_2 দুডাল বিষমৰেখা আৰু সিহঁতৰ সমীকৰণবোৰ এনে

$l_1: \vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$

$l_2: \vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2$



সমীকৰণ দুটাৰ দ্বাৰা বুজা যায় যে l_1 আৰু l_2 ৰেখা দুডালে ক্ৰমে $S(\vec{a}_1)$ আৰু $T(\vec{a}_2)$ বিন্দুৰ মাজেদি যায় আৰু $\vec{b}_1$ আৰু $\vec{b}_2$ ভেক্টৰ দুডালৰ সমান্তৰাল।

ধৰো $\vec{PQ}$ ভেক্টৰডালেই l_1 আৰু l_2ৰ মাজৰ নিম্নতম দূৰত্বৰ ৰেখা। গতিকে $\vec{PQ}$ ভেক্টৰটো $\vec{b}_1$ আৰু $\vec{b}_2$ উভয়ৰে ওপৰত লম্ব। কিন্তু $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ এনে এটা ভেক্টৰ যি $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ উভয়ৰে ওপৰত লম্ব।

∴ $\vec{PQ}$ ভেক্টৰটো $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ ৰ সমান্তৰাল।

∴ $\hat{n}$, $\vec{PQ}$ ৰ দিশত একক ভেক্টৰ হ'লে ই $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ ৰ দিশতো একক ভেক্টৰ হ'ব। অৰ্থাৎ $\hat{n} = \pm \dfrac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}$

$\therefore \vec{PQ} = |\vec{PQ}|\cdot\hat{n}$.

আকৌ $\vec{ST}$ আৰু $\vec{PQ}$ ৰ মাজৰে কোণ θ হ'লে,

$PQ = ST\cos\theta$

$$= \vec{ST}\cdot\hat{n}$$

$$= (\bar{a}_2-\bar{a}_1)\cdot\hat{n}$$

$$= \left|(\bar{a}_2-\bar{a}_1)\cdot\frac{(\bar{b}_1\times\bar{b}_2)}{|\bar{b}_1\times\bar{b}_2|}\right|$$

(θ → $\vec{ST}$ আৰু $\hat{n}$ ৰ মাজৰ কোণ)
($\vec{ST}\cdot\hat{n} = |\vec{ST}|\cdot 1\cdot\cos\theta$)
($\because \vec{ST} = \bar{a}_2-\bar{a}_1$)

অর্থাৎ S.D (নিম্নতম দূৰত্ব) $= \left|\frac{(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)\cdot(\bar{a}_2-\bar{a}_1)}{|\bar{b}_1\times\bar{b}_2|}\right|$

(*modulus ৰ চিন দিয়াৰ কাৰণ হ'ল দূৰত্বৰ মান যাতে negative নহয় তাকে লক্ষ্য ৰখাটো).

দুডাল অসমান্তৰাল ৰেখা $\vec{r} = \bar{a}_1 + \lambda\bar{b}_1$ আৰু $\bar{r} = \bar{a}_2 + \lambda\bar{b}_2$ ৰ মাজৰে নিম্নতম দূৰত্ব

13 $$\boxed{SD = \left|\frac{(\vec{b}_1\times\bar{b}_2)\cdot(\bar{a}_2-\bar{a}_1)}{|\bar{b}_1\times\bar{b}_2|}\right|}$$

এতিয়া চোৱা যাওক ৰেখাদুডালে কটাকটি কৰাৰ চৰ্ত:

ৰেখাদুডালে পৰস্পৰ ছেদন কৰিব যদিহে S.D = 0

$$\Rightarrow \left|\frac{(\bar{b}_1\times\bar{b}_2)\cdot(\bar{a}_2-\bar{a}_1)}{|\bar{b}_1\times\bar{b}_2|}\right| = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\bar{b}_1\times\bar{b}_2)\cdot(\bar{a}_2-\bar{a}_1) = 0}$$

—x—

SHORTEST DISTANCE BETWEEN TWO SKEW LINES (Cartesian form) কাৰ্টেজীয় ৰূপত নিম্নতম দূৰত্ব:

ধৰা হ'ল ৰেখাদুডাল ক্ৰমে

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \text{ আৰু } \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

আৰু

Shortest Distance

ৰেখা দুডালৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ হ'ব

$$\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda_1 \vec{b_1} \text{ আৰু } \vec{r} = \vec{a_2} + \lambda_2 \vec{b_2}.$$

য'ত $\vec{a_1} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$, $\vec{a_2} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$

$\vec{b_1} = l_1\hat{i} + m_1\hat{j} + n_1\hat{k}$, $\vec{b_2} = l_2\hat{i} + m_2\hat{j} + n_2\hat{k}$.

এতিয়া, $$\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = (m_1n_2 - m_2n_1)i - (l_1n_2 - l_2n_1)j + (l_1m_2 - l_2m_1)$$

$$= (l_1m_2 - m_2l_1)i + (l_2n_1 - l_1n_2)\hat{j} + (l_1m_2 - l_2m_1)k.$$

Also, $$|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{(l_1m_2 - m_2l_1)^2 + (l_2n_1 - l_1n_2)^2 + (l_1m_2 - l_2m_1)^2}$$

আৰু $$(\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2}) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

14

$$\therefore S.D = \left| \frac{(\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|} \right|$$

Modulus Determinant

$$= \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\sum (l_1m_2 - l_2m_1)^2}}.$$

ৰেখা দুডালে কটাকটি কৰাৰ চৰ্ত হ'ব

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

ৰেখা দুডাল সমান্তৰাল হ'লে ~~অন্তৰীক্ষত~~ সিহঁতৰ নিম্নদূৰত্ব:

দুডাল ৰেখা সমান্তৰাল হ'লে সিহঁত অন্তৰীক্ষৰ যি অৱস্থানতে নাথাকক কিয় সিহঁতক এখন সমতলত ৰাখিব পৰা যায়। গতিকে আমি একে সমতলৰ দুডাল সমান্তৰাল ৰেখাৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিয়াব লাগে।

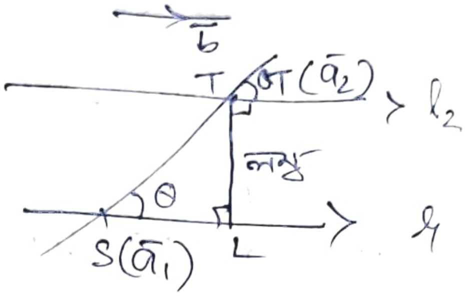
ধৰাহ'ল একেসমতলীয় সমান্তৰাল ৰেখা দুডাল

$l_1 : \vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{b}$ —— (1)

$l_2 : \vec{r} = \vec{a_2} + \lambda \vec{b}$ —— (2)

প্ৰথম ৰেখাডালে $\vec{a_1}$ বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু $\vec{b}$ ভেক্টৰৰ সমান্তৰাল। দ্বিতীয় ৰেখাডাল $\vec{a_2}$ ৰ মাজেৰে যায় আৰু এইডালো $\vec{b}$ ভেক্টৰৰ সমান্তৰাল।

চিত্ৰৰ পৰা পাওঁ,



$\vec{b} \times \vec{ST} = |\vec{b}||\vec{ST}| \sin\theta \, \hat{n}$

$\Rightarrow \vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1}) = |\vec{b}| LT \, \hat{n}$ $\left(\because \cancel{ST = ST\sin\theta}\right)$ $(ST\sin\theta = LT)$

15 $\Rightarrow |\vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1})| = |\vec{b}| LT.$ $(\because |\hat{n}| = 1)$

$\therefore LT = \left| \dfrac{\vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1})}{|\vec{b}|} \right|$

$\therefore$ নিম্নতম দূৰত্ব (S.D) $= \left| \dfrac{\vec{b} \times (\vec{a_2} - \vec{a_1})}{|\vec{b}|} \right|$

Q. $\vec{r} = (4\hat{i} - \hat{j}) + \lambda(i + 2j - 3k)$

$\vec{r} = (i - j + 2k) + \mu(2i + 4j - 5k)$ ৰ মাজৰ লম্বদূৰত্ব উলিওৱা :

Sol^n $d = \left| \dfrac{(\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|} \right|$

ইয়াত $\vec{a_2} = i - j + 2k$

$\vec{a_1} = 4i - j + 0k$

$\therefore \vec{a_2} - \vec{a_1} = 3 - 3i + 2k$.

নিম্নতম দূরত্ব

$\bar{b}_1 = i+2j-3k,\quad \bar{b}_2 = 2i+4j-5k$

$$\therefore \bar{b}_1 \times \bar{b}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 2i-j+0k$$

$$|\vec{b}_1 \times \bar{b}_2| = \sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}$$
$$= \sqrt{5}$$

$$(\bar{a}_2-\bar{a}_1)\cdot(\bar{b}_1\times\bar{b}_2) = (-3i+0j+2k)\cdot(2i-j+0k)$$
$$= -6+0+0$$
$$= -6$$

$$\therefore S.D = \left|\frac{-6}{\sqrt{5}}\right| = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}\ \text{Ans.}$$

Q. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ আরু $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{5}$ ৰ মাজৰ নিম্নতম
16 দূৰত্ব উলিওৱা।

Soln ① নং ৰেখাডাল $(1,2,3)$ ৰে যায় আৰু ইয়াৰ
দিশানুপাত $2, 3, 4$.
② নং " $(2,4,5)$ " " " "
দিশানুপাত $3, 4, 5$.

∴ প্ৰথম ৰেখাৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ

$$\bar{r} = (i+2j+3k)+\lambda_1(2i+3j+4k) \quad \text{———} ①$$

2য় ৰেখা $\bar{r} = (2i+4j+5k)+\lambda_2(3i+4j+5k)$,

$$\bar{a}_2-\bar{a}_1 = i+2j+2k$$

$$\bar{b}_1\times\bar{b}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -i+2j-k$$

$$|\bar{b}_1\times\bar{b}_2| = \sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$(\bar{a}_2-\bar{a}_1)\cdot(\bar{b}_1\times\bar{b}_2) = (i+2j+2k)\cdot(-i+2j-k)$$
$$= -1+4-2 = 1$$

$$\therefore SD = \left|\frac{(\bar{a}_2-\bar{a}_1)\cdot(\bar{b}_1\times\bar{b}_2)}{|\bar{b}_1\times\bar{b}_2|}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{6}}\right| = \frac{1}{\sqrt{6}}\ \text{Ans.}$$