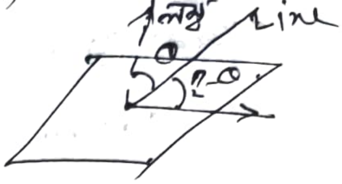
Next class in Tuesday

ই. এডাল ৰেখা আৰু এখন সমতলৰ মাজৰ কোণ :-



সাধাৰণ জ্ঞানৰ সহায়ত ক'ব পাৰি যে ইয়াত আমি ৰেখাডাল আৰু সমতলৰ অভিলম্বৰ মাজৰে কোণ-θ উলিয়াম আৰু তাৰ পূৰক কোণ $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ হ'ব ৰেখা আৰু সমতলৰ মাজৰে কোণ।

Sol^n. ধৰাহ'ল সমতল এনৰ সমীকৰণ $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$ —(1)

আৰু সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$ —(2)

(1) নং সমীকৰণত $\vec{n}$ হ'ল সমতলৰ ওপৰত অভিলম্ব।
(2) নং ৰেখাডাল $\vec{b}$ ভেক্টৰৰ সমান্তৰাল আৰু $\vec{a}$ ৰ মাজেৰে যায়।
এতিয়া (1) আৰু (2) ৰ মাজৰে কোণ θ ধৰা হ'ল।
∴ $\vec{n}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ মাজৰে কোণ হ'ব $\frac{\pi}{2}-\theta$,

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}|\,|\vec{n}|}$$

36 $$\Rightarrow \sin\theta=\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{n}|}$$

Note: ~~ৰেখা ...~~
(1) ৰেখাডাল সমতলৰ লম্ব হ'লে, $\vec{n}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ মাজৰ কোণ 0, গতিকে $\vec{b}$ আৰু $\vec{n}$ সমান্তৰাল

$$\therefore \vec{b}\times\vec{n}=\vec{0}$$
$$\text{বা, } \vec{b}=\lambda\vec{n}$$

(2) ৰেখাডাল সমতলৰ সমান্তৰাল হ'লে $\vec{b}$ আৰু $\vec{n}$ পৰস্পৰ লম্ব। ∴ $\vec{b}\cdot\vec{n}=0$

কাৰ্টেজীয় ৰূপ:

ৰেখাৰ সমীকৰণ

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \quad (1)$$

আৰু সমতলৰ সমীকৰণ

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad —(2)$$

(1) নং ৰেখাডাল $\vec{b}=a_1\hat{i}+b_1\hat{j}+c_1\hat{k}$ ৰ সমান্তৰাল আৰু $\vec{n}=A_1\hat{i}+B_1\hat{j}+C_1\hat{k}$ ভেক্টৰ (2) সমতলৰ লম্ব।
∴ সমতল আৰু ৰেখাৰ মাজৰ কোণ θ হ'লে, $\vec{n}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ মাজৰে কোণ হ'ব $\frac{\pi}{2}-\theta$.

$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}|\,|\vec{n}|}$

$$\sin\theta = \frac{(A_1 i + B_1 j + C_1 k)\cdot(a_1 i + b_1 j + c_1 k)}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}$$

$$= \frac{A_1a_1 + B_1b_1 + C_1c_1}{\sqrt{\Sigma A_1^2}\sqrt{\Sigma a_1^2}}$$

① ৰেখা আৰু সমতলৰ মাজৰ কোণ 0° হ'লে
$\vec{b}$ আৰু $\vec{n}$ ৰ মাজৰ কোণ 90°

$\therefore A_1a_1 + B_1b_1 + C_1c_1 = 0$

② ৰেখা আৰু সমতলৰ মাজৰ কোণ 90° হ'লে
$\vec{b}$ আৰু $\vec{n}$ ৰ মাজৰ কোণ 0°.

$\therefore \dfrac{A_1}{a_1} = \dfrac{B_1}{b_1} = \dfrac{C_1}{c_1}$.

37 Ex $\vec{r}\cdot(2i-j+k)=6$ আৰু
$\vec{r}\cdot(i+j+2k)=5$
সমতল দুখনৰ মাজৰ কোণ উলিওৱা।

উত্তৰ. সমতল দুখনৰ মাজৰ কোণ উলিয়াব লাগিলে আমি নিৰ্ণেয় অভিলম্ব $\vec{n}_1 = 2i-j+k$ আৰু $\vec{n}_2 = i+j+2k$ ৰ মাজৰ কোণ উলিয়াব লাগে।

$\therefore$ সমতল দুখনৰ মাজৰ কোণ θ হ'লে, $\vec{n}_1$ আৰু $\vec{n}_2$ দুডালৰ মাজৰ কোণো θ হ'ব.

এতিয়া $\cos\theta = \dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

$$= \frac{(2i-j+k)\cdot(i+j+2k)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}$$

$$= \frac{2-1+2}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+1+4}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.
$= \frac{\pi}{3}$. $\left(\because \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\right)$

Ex $x+y+2z=9$ আৰু $2x-y+z=15$
সমতল দুখনৰ মাজৰ কোণ উলিওৱা :

Solⁿ ১ম সমতলৰ ~~দিশা~~ অভিলম্বৰ দিশানুপাত : 1, 1, 2
২য় " " " 2, −1, 1.

সমতল দুখনৰ মাজৰ কোণ φ হ'লে,

$$\cos\phi = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{\Sigma a_1^2}\,\sqrt{\Sigma b_1^2}}$$

$$= \frac{1\times 2+1\times(-1)+2\times 1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\,\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}$$

$$= \frac{2-1+2}{\sqrt{6}\,\sqrt{6}}$$

38

$$= \frac{3}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$ #

Ex দেখুওৱা যে $2x+6y+6z=7$
আৰু $3x+4y-5z=8$
সমতল দুখন লম্বভাৱে থাকে।

Solⁿ প্ৰথম সমতলৰ অভিলম্বৰ দিশানুপাত 2, 6, 6
২য় " " " 3, 4, −5

সমতল দুখন লম্ব হ'ব যদি
$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$$

ইয়াত, $2\times 3+6\times 4+6\times(-5)$
$= 6+24-30$
$= 0$

∴ সমতল দুখন পৰস্পৰ লম্বভাৱে আছে।

৪. $x+2y+3z-7=0$

আৰু $2x-3y+4z=0$

সমতল দুখনৰ লম্বভাৱে থকা আৰু $(1,1,1)$ বিন্দুৰে যোৱা সমতলখনৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

Solⁿ $(1,1,1)$ বিন্দুৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ -

$$a(x-1)+b(y-1)+c(z-1)=0 \quad (1).$$

(1) নং সমতলখন প্ৰদত্ত সমতলৰ লম্বভাৱে থাকে।

$$\therefore 1\times a+2\times b+3\times c=0$$

আৰু $2\times a+(-3)\times b+4\times c=0$

বা

$$a+2b+3c=0$$

আৰু $2a-3b+4c=0$.

39 $$\Rightarrow \frac{a}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ -3 & 4\end{vmatrix}}=\frac{-b}{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}}=\frac{c}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{8+9}=\frac{-b}{4-6}=\frac{c}{-3-4}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{17}=\frac{b}{2}=\frac{c}{-7}=k \text{ (ধৰো)}$$

$$\Rightarrow a=17k,\ b=2k,\ c=-7k.$$

$$(1)\Rightarrow 17k(x-1)+2k(y-1)+(-7k)(z-1)=0$$

$$\Rightarrow 17x+2y-7z=26.$$ Answer.

Ex $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{6}$ ৰেখাডালৰ লগত $10x+2y-11z=3$ সমতলে কৰা কোণৰ মাপ উলিওৱা।

Solⁿ. ৰেখাডালৰ দিশানুপাত $2, 3, 6$.

সমতলৰ লম্বৰ " $10, 2, -11$

ধৰাহ'ল নিৰ্ণেয় কোণটো α

$$\therefore \sin\alpha=\left|\frac{2\times10+3\times2+6\times(-11)}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\sqrt{10^2+2^2+11^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{-40}{7\times15}\right|=\frac{8}{21}$$

$$\therefore \alpha=\sin^{-1}\left(\frac{8}{21}\right).$$ Ans

Ex. $\bar{r} = (-i+3k) + \lambda(2i+3j+6k)$ ৰেখাডালে $\bar{r}\cdot(10\hat{i}+2j-11k)=3$ সমতলৰ লগত কৰা কোণ নিৰ্ণয় কৰা।

Soln. ৰেখাডাল $\bar{b} = 2i+3j+6k$ ৰ সমান্তৰালে, আৰু সমতলখন $\bar{n} = 10i+2j-11k$ ৰ লম্বভাৱে থাকে।

নিৰ্ণেয় কোণ θ ধৰা হ'ল।

$$\therefore \sin\theta = \left|\frac{\bar{b}\cdot\bar{n}}{|\bar{b}|\cdot|\bar{n}|}\right|$$

$$= \left|\frac{(2i+3j+6k)\cdot(10i+2j-11k)}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\ \sqrt{10^2+2^2+(-11)^2}}\right|$$

40 $$= \left|\frac{20+6-66}{\sqrt{49}\ \sqrt{225}}\right|$$

$$= \left|\frac{-8}{21}\right|$$

$$= \frac{8}{21}$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{8}{21}\right) \text{ Ans.}$$

---

১৭. এটা বিন্দুৰ পৰা এখন সমতলৰ দূৰত্ব:-

[ধৰি লোৱা হ'ল যে হাতত এটা পিলগুটি লৈ থকা হৈছে আৰু পৃথিৱী এখন সমতল। তেন্তে পিলটোৰ পৰা পৃথিৱীৰ লম্বদূৰত্বই হ'ব পিলটো আৰু ~~সম~~ পৃথিৱী নামৰ সমতলখনৰ দূৰত্ব। অৰ্থাৎ এটা বিন্দুৰ পৰা সমতল এখনলৈ টনা লম্বৰ দৈৰ্ঘ্যই বিন্দুৰ পৰা সমতলৰ দূৰত্ব।]

ধৰা হ'ল $P(\bar{a})$ বিন্দুৰ পৰা P_1 সমতললৈ দূৰত্ব উলিয়াব লাগে।

ধৰা হ'ল P_1 সমতলৰ সমীকৰণ $\bar{r}\cdot\hat{n} = d$ —(1)

ইয়াৰ সমান্তৰালকৈ থকা $P(\bar{a})$ ৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ হ'ব $(\bar{r}-\bar{a})\cdot\hat{n} = 0$

বা, $\bar{r}\cdot\hat{n} = \bar{a}\cdot\hat{n}$ —(2)

অৰ্থাৎ: সমান্তৰাল সমতল দুখনৰ মাজৰ লম্ব দূৰত্বই হ'ব বিন্দু আৰু সমতলৰ দূৰত্ব।

∴ এই দূৰত্ব হ'ব = (মূল বিন্দুৰ পৰা P_1 সমতলৰ লম্বদূৰত্ব) − (মূল বিন্দুৰ পৰা নতুন সমতলৰ লম্বদূৰত্ব)

$$= |d - \bar{a}\cdot\hat{n}|$$

—x—

<u>note</u>: ইয়াত $\hat{n}$ ৰ সলনি $\bar{n}$ ব্যৱহাৰ কৰিলে পাম

$$\text{দূৰত্ব} = \left|\frac{\bar{a}\cdot\bar{n} - d}{|\bar{n}|}\right|$$

<u>কাৰ্টেজীয় ৰূপ</u>:

ধৰো সমতলখন $Ax + By + Cz = D$ —(1)

আৰু $P(x_1, y_1, z_1)$ ৰ পৰা ইয়াৰ লম্বদূৰত্ব উলিয়াব লাগে।

এনেক্ষেত্ৰত $d = D$; $\bar{a} = x_1 i + y_1 j + z_1 k$, $\bar{n} = Ai + Bj + Ck$.

41 ∴ উলিয়াব লগা দূৰত্ব $= \left|\frac{(x_1 i + y_1 j + z_1 k)\cdot(Ai + Bj + Ck) - D}{|\bar{n}|}\right|$

$$= \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$ Ans.

<u>Ex</u>. $(0,0,0)$ বিন্দুৰ পৰা $3x - 4y + 12z = 3$ সমতলৰ দূৰত্ব উলিওৱা।

<u>Soln</u>. ইয়াত $A = 3$, $B = -4$, $C = 12$, $D = 3$

$x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$

∴ উলিয়াব লগা দূৰত্ব $= \left|\frac{3\times 0 - 4\times 0 + 2\times 0 - 3}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2}}\right|$

$$= \left|\frac{-3}{\sqrt{9 + 16 + 144}}\right|$$

$$= \frac{3}{13} \text{ unit}$$ <u>Ans</u>.

<u>Ex</u>. $(2, 5, -3)$ বিন্দুৰ পৰা $\bar{r}\cdot(6i - 3j + 2k) = 4$ সমতলৰ দূৰত্ব উলিওৱা।

<u>Soln</u> বিন্দুটো $\bar{a} = 2i + 5j - 3k$, $d = 4$

সমতলৰ অভিলম্ব $\bar{n} = 6i - 3j + 2k$

∴ Distance $= \left|\frac{(2i + 5j - 3k)\cdot(6i - 3j + 2k)}{|6i - 3j + 2k|}\right| = 12 - 15$

উলিয়াব লগা দূৰত্ব

$$= \left| \frac{(2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k})\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}-4)}{|6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}|} \right|$$

$$= \left| \frac{12-15-6-4}{\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{-13}{\sqrt{49}} \right| = \frac{13}{7} \text{ একক।}$$

Coplanarity of two lines:

দুডাল ৰেখা একেসমতলীয় হোৱাৰ চৰ্ত :-

ধৰাহ'ল ৰেখা দুডাল

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda_1 \vec{b}_1 \quad (1)$$
$$\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2 \quad (2)$$

ৰেখা (1) $A(\vec{a}_1)$ বিন্দুৰে যায় আৰু $\vec{b}_1$ ৰ সমান্তৰাল।

" (2) $B(\vec{a}_2)$ " " " $\vec{b}_2$ ৰ "

A আৰু B সংযোগ কৰা হ'ল।

$\therefore$ $\vec{AB}$ = B ৰ অ: ভে: − A ৰ p.v.

$= \vec{a}_2 - \vec{a}_1$.

যদি ৰেখা (1) আৰু (2) একে সমতলত থাকে, তেন্তে $\vec{AB}$ ও সেইখন সমতলতেই থাকিব।

কিন্তু (1) আৰু (2) ৰেখা থকা সমতলখন $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ ৰ লম্ব।

$\therefore$ $\vec{AB}$ ও $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ ৰ লম্ব।

$$\therefore \vec{AB}\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$$

$\Rightarrow (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$ এইটোৱেই উলিয়াবলগাছিল।

কাৰ্টেজীয় আকাৰ: বা $\vec{a}_1\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = \vec{a}_2\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)$

ধৰাহ'ল ৰেখাদুডালৰ সমীকৰণ

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \quad \text{—— (1)}$$

আৰু

$$\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2} \quad \text{—— (2)}$$

অর্থাৎ ① নং রেখা $A(x_1, y_1, z_1)$ বিন্দুকে যায় আছে দিগানুপাত a_1, b_1, c_1
② " " $B(x_2, y_2, z_2)$ " " " " a_2, b_2, c_2

$\therefore \vec{AB} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$

$\vec{\alpha} = a_1 i + b_1 j + c_1 k$

$\vec{\beta} = a_2 i + b_2 j + c_2 k.$

$\therefore$ সমতলীয় হোয়ার শর্ত: $\vec{AB} \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Q. দেখুওরা হয়
$$\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5} \quad ①$$
$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5} \quad ②$$
~~সমতল~~ রেখা দুডাল ~~একেরে~~ একে সমতলীয়।

43 Sol^n. আমি পাওঁ

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1+3 & 2-1 & 5-5 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} +2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (5 - 10) - 1(-15 + 5)$$

$$= -10 + 10$$

$$= 0$$

$\therefore$ রেখা দুডাল একসমতলীয়।

Q. দেখুওরা হয়
$$\vec{r} = (i + j - k) + \lambda(3i - j)$$
$$\vec{r} = (4i - k) + \mu(2i + 3k)$$
রেখা দুডাল একেমন সমতলত থাকে।

Sol^{n}: ৰেখাদুডাল একেসমতলীয় হোৱাৰ চৰ্ত হ'ল

$$(\bar{a}_1 - \bar{a}_2)\cdot(\bar{b}_1 \times \bar{b}_2) = 0$$

বা $\bar{a}_1 \cdot (\bar{b}_1 \times \bar{b}_2) = \bar{a}_2 \cdot (\bar{b}_1 \times \bar{b}_2)$

ইয়াত, $\bar{a}_1 = i + j - k$

$\bar{a}_2 = 4i + 0j - k$

$\therefore \bar{a}_1 - \bar{a}_2 = -3i + j + 0k.$

$$\bar{b}_1 \times \bar{b}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

44

$$= i(-3-0) - j(9-0) + k(0+2)$$

$$= -3i - 9j + 2k.$$

Now, $(\bar{a}_2 - \bar{a}_1)\cdot(-3i + j + 0k)$

$$= (-3i + j + 0k)\cdot(-3i - 9j + 2k)$$

$$= 9 - 9 + 0$$

$$= 0$$

$\therefore$ ৰেখাদুডাল একসমতলীয়।

END OF CH – 11