Q7 একটা মুদ্রা তিনবার টস করা হল। ধরি লেখা হলে যে হয় পরা ৪ টা ফলাফল সমসম্ভাব্য।

E: প্রথম টসে H পেরা ঘটনা।

F: শেষ টসে T পেরা ঘটনা

দেখুরা যে দুপোটা ঘটনা স্বতন্ত্র।

Sol^n প্রতিদর্শ সমষ্টি $= \{HHH, HHT, HTH, THH, TTHTHT, HTT, TTT\}$

$E = \{$ ~~HHH~~ $HHH, HHT, HTH, HTT\}$

$F = \{HHT, THT, HTT, TTT\}$

$E \cap F = \{HHT, HTT\}$

$\therefore P(E) = \frac{4}{8}, \quad P(F) = \frac{4}{8}, \quad P(E \cap F) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Now, $P(E) \times P(F) = \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

এখন যেহেতু $P(E \cap F) = P(E) P(F)$

$\therefore$ ঘটনা E আর F স্বতন্ত্র।

Q.8 একটা অনভিনত (unbiased) লুডুগুটি দুবার নিক্ষেপ করা হল। ধরা.

A = প্রথম প্রক্ষেপনত অযুগ্ম সংখ্যা পেরা ঘটনা

B = দ্বিতীয় " " " " "

দেখুরা যে ঘটনা দুটা স্বতন্ত্র।

Sol^n মুট ঘটনার সংখ্যা $= 6^2 = 36$

প্রথম প্রক্ষেপনত অযুগ্ম সংখ্যা পেরার অর্থ হল প্রথম পক্ষেপনত 1 বা 3 বা 5 র মাজের সংখ্যা এটা পেরা আর 2য় প্রক্ষেপনত নিক্ষেপ এটা সংখ্যা (6 টার মাজর) পেরা ঘটনা।

$\therefore$ প্রথম প্রক্ষেপনত 3 টার মাজর এটা আর 2য় প্রক্ষেপনত 6 টার মাজর এটা বাছিব লালে অর্থাত $3 \times 6 = 18$ সংখ্যক অনুকূল ঘটনা A র বারে থাকিব।

$\therefore P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

একে খুজিবে, $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = P\{$ প্রথম প্রক্ষেপনত অযুগ্ম আরু দ্বিতীয় প্রক্ষেপনত অযুগ্ম $\}$

$= \frac{3 \times 3}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

এখন $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

$\therefore$ ঘটনা দুটা স্বতন্ত্র।

Ex9. 3টা মুদ্রা উৎক্ষেপন করা হল।

E = 3টা H নাইবা 3টা T.

F = কমপক্ষে 2টা H.

G = অতি বেছি 2টা H

ঘটনা- তিনিটার স্বতন্ত্রতা বিচার করা (প্রতিবার ছুটকৈ ক্ষে)

Sol^n (i) প্রথমতে ঘটনা E আরু F লোৱা হল

S = {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT}

E = {HHH, TTT}

F = {HHH, HHT, HTH, THH}

$\therefore P(E) = \frac{2}{8}$

$E \cap F = \{HHH\}$

$\therefore P(E) \times P(F) = \frac{2}{8} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{8} = P(E \cap F)$

$\therefore$ E আরু F স্বতন্ত্র।

(ii) E & G.

G = {HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT}

$E \cap G = \{TTT\}$

$\therefore P(E) \times P(G) = \frac{2}{8} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{32} \neq \frac{1}{8} = P(E \cap G)$

$\therefore$ E আরু G স্বতন্ত্র নহয়।

(iii) F আরু G.

$F \cap G = \{HTH, THH, HHT\}$

এতিয়া $P(F) \times P(G) = \frac{4}{8} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{16} \neq \frac{3}{8} = P(F \cap G)$

$\therefore$ F আরু G স্বতন্ত্র নহয়।

Ex10 এটা সুন্দৰ মুদ্রা আরু এটা অনভিনৱ লুডুগুটি- টচ কৰা হল। ধৰা-

A: মুদ্রাৰ লগা H লোৱা ঘটনা।

B: লুডুগুটিৰ লগা 3 " " ।

A আরু B ঘটনাৰ স্বতন্ত্রতা বিচাৰ কৰা।

Sol^n $S = \{(H,1), (H,2), (H,3), (H,4), (H,5), (H,6)$
$(T,1) (T,2) (T,3) (T,4) (T,5) (T,6)\}$ এয়াত $n(S) = 12$

$A = \{(H,1), (H,2), (H,3), (H,4), (H,5), (H,6)\}$

$B = \{(H,3), (T,3)\}$; $A \cap B = \{(H,3)\}$

$\therefore P(A) \times P(B) = \frac{6}{12} \times \frac{2}{12} = \frac{1}{12} = P(A \cap B)$

$\therefore$ ঘটনা দুটো স্বতন্ত্র।

চতুঃসাহপক্ষ সম্ভাবিতার ধর্ম:

ধরাহ'ল S যে প্রতিদর্শ সমষ্টি সূচায়হে আৰু E আৰু F যিকোনো দুটা ঘটনা।

(1) $P(S/F) = P(F/F) = 1$

আমি জানো যে $P(S/F) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$

আকৌ $P(F/F) = \frac{P(F \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1.$

2. ধৰা হ'ল A এটা ঘটনা যাতে $P(A) \neq 0$, তেন্তে

$$P[(E \cup F)/A] = P(E/A) + P(F/A) - P(E \cap F/A).$$

আৰু $E \cap F = \phi$ হ'লে,

$$P[(E \cap F)/A] = P(E/A) + P(F/A).$$

আমি জানো $P(E \cup F/A) = \frac{P[(E \cup F) \cap A]}{P(A)}$

$= \frac{P[(E \cap A) \cup (F \cap A)]}{P(A)}$ (বিতৰণ-বিধি)

$= \frac{P(E \cap A) + P(F \cap A) - P((E \cap F) \cap A)}{P(A)}$

$= \frac{P(E \cap A)}{P(A)} + \frac{P(F \cap A)}{P(A)} - \frac{P((A \cap B) \cap A)}{P(A)}$

$= P(E/A) + P(F/A) - P(E \cap F/A)$. Proved

3. $P(E'/F) \neq 1 - P(E/F)$

$E \cap F = \phi$ হ'লে $P(E \cap F/A) = 0$

$\therefore P(E \cup F/A) = P(E/A) + P(F/A)$. Proved.

3) $P(E'/F) = 1 - P(E/F)$ যেখানে $E' = S - E$.

Soln. we have $P(\frac{S}{F}) = 1$

$\Rightarrow P((E \cup E')/F) = 1$ $\quad (\because E \cup E' = S)$

$\Rightarrow P(E/F) + P(E'/F) = 1$ $\quad (\because E \cap E' = \Phi)$

$\Rightarrow P(E'/F) = 1 - P(E/F)$. Proved.

— x —

Ex 1. প্রদত্ত ঘটনা E এবং F এর জন্য ঘটনা সত

$P(E) = 0.6$, $P(F) = 0.3$, $P(E \cap F) = 0.2$

(i) $P(E/F) = ?$ (ii) $P(F/E) = ?$

Soln $P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}$

$P(F/E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$

(2.) $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.5$, $P(B/A) = 0.4$

Find (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A/B)$, (iii) $P(A \cup B)$

Soln (i) $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B/A)$

$\Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{0.8} = 0.5$

$\Rightarrow P(A \cap B) = .40$

$\therefore P(A \cap B) = 0.4$.

(ii) $P(\frac{A}{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.4}{0.5} = \frac{4}{5}$

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.8 + 0.5 - 0.4$

$= 0.9$

Ans.

Q. $P(A) = \frac{6}{11}$, $P(B) = \frac{5}{11}$, $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$

(i) $P(AB)$, (ii) $P(A/B)$ নির্ণয় কর।

Soln $\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A/B)$

$\Rightarrow P(AB) = P(B) P(A/B)$

$= \frac{5}{11} \times$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$\Rightarrow \frac{7}{11} = \frac{5}{11} + \frac{6}{11} - P(AB)$

$\Rightarrow P(AB) = 1 - \frac{7}{11}$

$= \frac{4}{11}$.

$\therefore P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4/11}{5/11}$

$= \frac{4}{5}$ Ans.

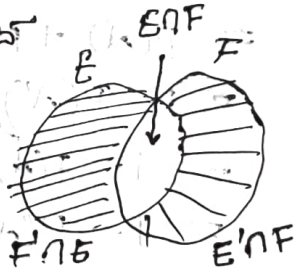
— x — x —

স্বতন্ত্র ঘটনার ধর্ম:

Ex. দেখাও যে যদি E আর F স্বতন্ত্র তবে E আর F' ও স্বতন্ত্র।

Soln দিয়া আছে যে E আর F স্বতন্ত্র।

$\therefore P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$



উপরের চিত্রের সাহায্যে পাই $E \cap F$ আর $E \cap F'$ পরস্পরবর্জিত (mutually exclusive) ঘটনা আর $E = (E \cap F) \cup (E \cap F')$

$\Rightarrow P(E) = P[(E \cap F) \cup (E \cap F')]$

$\Rightarrow \quad = P(E \cap F) + P(E \cap F')$ (পরস্পরবর্জিত)

$\Rightarrow P(E \cap F') = P(E) - P(E \cap F)$

$= P(E) - P(E) P(F)$ ($\because$ স্বতন্ত্র)

$= P(E)[1 - P(F)]$

$= P(E) P(F')$.

$\therefore$ E আর F' স্বতন্ত্র।

একইভাবে দেখানো যায় যে E' আর F স্বতন্ত্র।

Ex দেখাও যে E এবং F স্বতন্ত্র হলে E' এবং F' ও স্বতন্ত্র হবে।

(i) প্রমাণ- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$

$= [1 - P(A)] - P(B) + P(A)P(B)$

$= [1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)]$

$= (1 - P(A))(1 - P(B))$

$= P(A') \cdot P(B')$

$\therefore$ A' এবং B' স্বতন্ত্র।

Ex. যদি A এবং B স্বতন্ত্র হলে A এবং B এর অন্তত: একটি সংঘটনের মান $1 - P(A')P(B')$

সমাধান

$P(A$ অথবা B এর কমপক্ষে একটি$)$

$= P(A \cup B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

$= P(A) + P(B)(1 - P(A))$

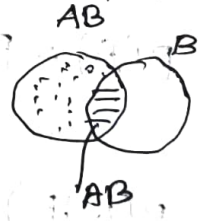
$= 1 - P(A') + P(B)P(A')$ $\quad \left| P(A) = 1 - P(A') \right.$

$= 1 - P(A')[1 - P(B)]$

$= 1 - P(A')P(B')$

Ex উদ্দীপকের সংকেত

$P(A), P(A+B), P(AB), P(A) + P(B)$



আমি জানি যে, $A = AB \cup AB'$

$\Rightarrow P(A) = P(AB) + P(AB')$

এখানে $P(AB') \geq 0$

$\Rightarrow P(A) \geq P(AB)$ ——— ①

একইভাবে $P(B) \geq P(AB)$ ——— ②

$\Rightarrow P(B) - P(AB) \geq 0$ ——— ③

আবার আমি জানি যে $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$\Rightarrow P(A+B) - P(A) = P(B) - P(AB)$

$\Rightarrow P(A+B) - P(A) \geq 0$ from ③

$P(A+B) \geq P(A)$ —— (4)

Also, $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$\Rightarrow P(A+B) \leq P(A) + P(B)$ (5) $\because P(AB) \geq 0$.

Thus $P(AB) < P(A) \leq P(A+B) \leq P(A) + P(B)$

Ans.