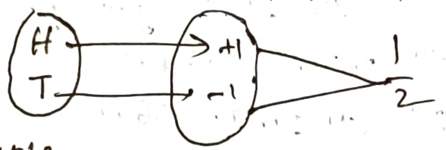
যাদৃচ্ছিক চলক আৰু ইয়াৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন:



Sample space   Random variable   Probability.

যাদৃচ্ছিক চলক: যাদৃচ্ছিক চলক X হ'ল এটা ফলন $X : \Omega \to \mathbb{R}$ য'ত $\mathbb{R}$ হ'ল বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি আৰু Ω হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ সকলো ফলাফলৰে গঠন কৰা এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

Ex পৰীক্ষা: মুদ্ৰা এটা 2 বাৰ টছ কৰা হ'ল। যদি X যে প্ৰাপ্ত হোৱা মুণ্ডৰ সংখ্যা সূচায় তেন্তে X এটা যাদৃচ্ছিক চলক। প্ৰতিটো ফলাফলৰ বাবে ইয়াৰ মানবোৰ হ'ব

$$X(HH)=2,\quad X(HT)=1,\quad X(TH)=1,\quad X(TT)=0$$ *

Ex এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত মুদ্ৰা এটা তিনিবাৰ টছ কৰা হ'ল। যাদৃচ্ছিক চলক X ক এনেদৰে সংজ্ঞা দিয়া হৈছে

26 $X(\omega) =$ মুণ্ডৰ সংখ্যা $\omega \in S$.

য'ত $S = \{HHH, HTH, THH, HHT, TTH, HTT, THT, TTT\}$

Soln. X যে ল'ব পৰা মানবোৰ 0, 1, 2, 3.

এতিয়া, $P(X=0) =$ এটাও H নোপোৱাৰ সম্ভাৱিতা $= P(TTT) = \frac{1}{8}$

$P(X=1) =$ এটা H পোৱাৰ সম্ভাৱিতা $= \frac{3}{8}$

$P(X=2) =$ দুটা H " " $= \frac{3}{8}$

$P(X=3) =$ তিনিটা H " " $= \frac{1}{8}$.

এইবিলাক কথা আমি তলত দিয়া ধৰণে উপস্থাপন কৰিব পাৰো:

X:	0	1	2	3
$P(x)$:	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

যাদৃচ্ছিক চলকৰ মান আৰু সম্ভাৱিতা এনেদৰে সজোৱাকে সম্ভাৱিতা বণ্টন বুলি কোৱা হয়।

সংজ্ঞা এটা যাদৃচ্ছিক চলক x ৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন হ'ল সংখ্যাৰ এক প্ৰণালী। যদি x যে $x_1, x_2, \ldots, x_n$ মানবোৰ লয় যাতে $P(x_1) = p_1,\ P(x_2) = p_2, \ldots, P(x_n) = p_n$ তেন্তে

$$\begin{array}{lccccc} X: & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ P(x): & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n. \end{array}$$

ক x-ৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন বোলে।

আমি জানো যে মুঠ সম্ভাৱিতা $=1$ অৰ্থাৎ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Ex। এটা অনভিনত লুডুগুটি দলিওৱা হ'ল। যাদৃচ্ছিক চলক X ৰ সংজ্ঞা তলত দিয়া ধৰণৰ-

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{যদি এটা যুগ্ম সংখ্যা ওলাই} \\ 0, & \text{যদি " অযুগ্ম " "} \end{cases}$$

তেন্তে X ৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো উলিওৱা।

Soln ইয়াত $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(X=0) =$ এটা অযুগ্ম সংখ্যা পোৱাৰ সম্ভাৱিতা $= \frac{3}{6}$

$P(X=1) =$ " যুগ্ম " " " $= \frac{3}{6}$

∴ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ব

$$\begin{array}{lcc} X: & 0 & 1 \\ P(x): & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}. \end{array}$$

Ex দিয়া আছে X যাদৃচ্ছিক চলক-

আৰু $P(x) = \begin{cases} k & \text{if } x=0 \\ 2k & \text{if } x=1 \\ 3k & \text{if } x=2 \\ 0, & \text{অন্যক্ষেত্ৰত} \end{cases}$

(i) $k = ?$ ~~(ii) $P(X<2)$, $P(X\leq 2)$ আৰু $P(X\geq 2)$~~ উলিওৱা।

Soln সম্ভাৱিতা বণ্টনটো লিখি লোৱা যাওক:

$$\begin{array}{lccc} X: & 0 & 1 & 2 \\ P(x): & k & 2k & 3k \end{array}$$

সম্ভাৱিতা বণ্টন হোৱাৰ চৰ্তটো হ'ল $\Sigma p_i = 1$.

$$\therefore\quad k + 2k + 3k = 1$$

$$\Rightarrow\quad k = \frac{1}{6}.$$

∴ প্ৰকৃত বণ্টনটো হ'ল

$$\begin{array}{lccc} X: & 0 & 1 & 2 \\ P(x): & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{array}$$

যাদৃচ্ছিক চলকৰ মাধ্য (μ) বা Mathematical Expectation ($E(x)$)
Mean of random variable (μ) বা গাণিতিক প্ৰত্যাশা ($E(x)$)

অংশ :- ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক চলক X ৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো তলত দিয়া ধৰণৰ -

$$X: \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n$$
$$p(x): \quad p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n.$$

μ — মিউ

য'ত $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

তেন্তে X ৰ মাধ্য $(\mu) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$

$$\text{বা} \quad \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Note

পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানত মাধ্য শব্দটোৰ সলনি গাণিতিক প্ৰত্যাশা (Mathematical expectation) শব্দটো অধিক ব্যৱহাৰ কৰা হয়। $\mu = E(X)$ ধৰা হয়।

ব্যৱহাৰিক দিশৰ লগত ~~সংগতি~~ সংগতি ৰাখি ইয়াক ভৰযুক্ত গড় (Weighted average) ও বুলি কোৱা হয়।

Ex. ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক ভাৱে নিৰ্বাচন কৰা স্কুলীয়া ছাত্ৰ X যে পঢ়া সময়ক নিৰ্দেশ কৰে। X যে ইয়াৰ মান x তলত দিয়া ধৰণে দিয়া হৈছে। ইয়াত k হৈছে এটা অজ্ঞাত ধ্ৰুৱক।

$$P(X=x) = \begin{cases} 0.1 & \text{if } x=0 \\ kx & \text{if } x=1 \,\&\, 2 \\ k(5-x) & \text{if } x=3 \text{ or } 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(i) k ৰ মান উলিওৱা। সেইবাবে (ii) কমপক্ষেও 2 ঘন্টা পঢ়া (iii) যথাযথ (exactly) ভাৱে 2 ঘন্টা (iv) অতিবেছি 2 ঘন্টা ~~পঢ়িব~~ পঢ়াৰ সম্ভাৱিতা উলিওৱা।

Solⁿ সম্ভাৱিতা বণ্টন তালিকা

$X:$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(x):$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

অৰ্থাৎ

$x:$	0	1	2	3	4
$P(x):$	0.1	k	2k	2k	k

(i) চৰ্তমতে $0.1 + k + 2k + 2k + k = 1$

$$\Rightarrow 6k = 0.9$$

$$\Rightarrow k = \frac{.9}{6} = \frac{3}{20}$$

(ii) উলিয়াব লগা সম্ভাৱিতা,

$$P(x \geq 2) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4)$$
$$= 2k + 2k + k$$
$$= 5k$$
$$= \frac{5 \times 3}{20} = \frac{3}{4}$$

(iii) উলিয়াব লগা সম্ভাৱিতা,

$$P(x=2) = 2k = 2 \times \frac{3}{20} = \frac{3}{10}$$

(iv) উলিয়াব লগা সম্ভাৱিতা

$$P(x \leq 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$$
$$= 0.1 + k + 2k$$
$$= 0.1 + 3k$$
$$= 0.1 + \frac{9}{20}$$
$$= \frac{11}{20} \quad \text{Ans.}$$

$\frac{1}{10} + \frac{9}{20}$

গাণিতিক প্ৰত্যাশাৰ উদাহৰণ
বা
মাধ্যৰ উদাহৰণ

1. এজন জুৱাৰীৰ $\frac{3}{5}$ সম্ভাৱিতাৰে 50 টকা লাভ আৰু $\frac{2}{5}$ সম্ভাৱিতাৰে 30 টকা লোকচান হয়। তেওঁৰ প্ৰকৃত লাভৰ গাণিতিক প্ৰত্যাশা (মাধ্য) কিমান?

গড় বা গাণিতিক প্ৰত্যাশা μ বা E(x)

Soln. ধৰা হ'ল প্ৰকৃত লাভ = x টকা
সম্ভাৱিতা বণ্টন তালিকা

x :	50	−30
$p(x)$:	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

$$\therefore E(x) = \mu = 50 \times \frac{3}{5} + (-30) \times \frac{2}{5}$$
$$= 18.$$

∴ প্ৰকৃত লাভৰ প্ৰত্যাশা = 18 টকা।

Q. দুটা মুদ্ৰা উৎক্ষেপন কৰি পোৱা মুণ্ডৰ সংখ্যাৰ গাণিতিক প্ৰত্যাশা কিমান?

সমাধান : ধৰা হ'ল মুণ্ডৰ সংখ্যা $= X$

অৰ্থাৎ X যাদৃচ্ছিক চলক।

Solⁿ. $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

$\cancel{P(HH) = P(H)P(H) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}}$

$P(X=0) =$ এটাও মুণ্ড নোপোৱা সম্ভাৱিতা

$= P(TT) = \frac{1}{4}$

$P(X=1) = P($এটা মুণ্ড$)$

$= P(HT \text{ or } TH)$

$= \frac{2}{4}$

$= \frac{1}{2}$

$P(X=2) =$ দুটা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা

$= P(HH)$

$= \frac{1}{4}$

∴ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো

X :	0	1	2
$P(X)$:	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

∴ গাণিতিক প্ৰত্যাশা বা মাধ্য হ'ব

$\mu = E(X) = 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$= 1$

Q. ভালদৰে সানমিহলি কৰা 52খন পাতৰ ~~[illegible]~~ এক পেকেট ~~[illegible]~~ তাচপাতৰ পৰা পুনঃস্থাপন নকৰাকৈ দুখন তাচপাত এখন এখনকৈ লোৱা হ'ল। টেক্কাৰ সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো উলিওৱা।

Solⁿ টেক্কা (Ace)ৰ সংখ্যাটো এটা যাদৃচ্ছিক চলক। ইয়াক X ৰে সূচোৱা হওক। X এ 0, 1 বা 2 মান ল'ব পাৰে।

$P(X=0) = P(\text{non-ace} \& \text{non-ace})$

$= P(\text{non-ace}) \times P(\text{non-ace})$

$= \frac{48}{52} \times \frac{48}{52}$

$= \frac{144}{169}$

52খন পাতৰ
4খন পাত টেক্কা
∴ 48খন পাত non-টেক্কা

$P(X=1) = P$[(প্রথম টেক্কা আর দ্বিতীয় non-টেক্কা) অথবা (প্রথম non-টেক্কা আর দ্বিতীয় টেক্কা)]

$= P$(টেক্কা) P(non-টেক্কা) $+ P$(non টেক্কা) P(টেক্কা)

$$= \frac{4}{52} \times \frac{48}{52} + \frac{48}{52} \times \frac{4}{52}$$

$$= \frac{24}{169}$$

$P(X=2) = P$(টেক্কা আর টেক্কা)

$= P$(টেক্কা) $\times P$(টেক্কা)

$$= \frac{4}{52} \times \frac{4}{52}$$

$$= \frac{1}{169}.$$

∴ সম্ভাবিতা বণ্টন তালিকা-

X :	0	1	2
$P(x)$:	$\frac{144}{169}$	$\frac{24}{169}$	$\frac{1}{169}$

∴ টেক্কার সংখ্যা (x) র গাণিতিক প্রত্যাশা

$$\mu = 0 \times \frac{144}{169} + 1 \times \frac{24}{169} + 2 \times \frac{1}{169}$$

$= \frac{26}{169}$. Ans.

— x —