যাদৃচ্ছিক চলকৰ প্ৰসৰণ:

Variance of Random variable.

ধৰা হ'ল, X এটা যাদৃচ্ছিক চলক যাৰ সম্ভাৱিতা বন্টনটো এনে ধৰণৰ:

$$X : x_1 \quad x_2 \quad \cdots \cdots \quad x_n$$
$$P(X) : p_1 \quad p_2 \quad \cdots \cdots \quad p_n$$

ধৰা হওক $\mu = E(X)$, X ৰ মাধ্য অথবা গাণিতিক প্ৰত্যাশা। X ৰ প্ৰসৰণক σ_x^2, বা $Var(X)$ হিচাপে লিখা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা হ'ল—

চিগমা $$\sigma_x^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i \quad (1)$$

ইয়াৰ আন এটা সংজ্ঞা (সমাৰ্থক) হ'ল

$$\sigma_x^2 = E(X-\mu)^2, \quad \mu = E(X).$$

যাদৃচ্ছিক চলক X ৰ প্ৰামাণিক বিচ্যুতি: হ'ল এটা অঋণাত্মক সংখ্যা। ইয়াৰ সংজ্ঞা হ'ল

$$\sigma_x = \sqrt{Var(X)}$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i}$$

Important Laws: –

(i) $E(a) = a$, a এটা ধ্ৰুৱক।

Proof. $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, $\sum p_i = 1$

ইয়াত $x_i = a$

$$\therefore E(a) = \sum_{i=1}^{n} a p_i$$
$$= a \sum_{i=1}^{n} p_i$$
$$= a \cdot 1$$
$$= a.$$

(ii) $E(aX) = aE(X)$

Proof $$\sum_{i=1}^{n} (a x_i) p_i = \sum_{i=1}^{n} a x_i p_i$$
$$= a \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$
$$= a E(X).$$

Thus $E(aX) = aE(X)$.

(iii) $E\{a\phi(x)\} = aE\{\phi(x)\}$

L.H.S. $E\{a\phi(x)\} = \sum_{i=1}^{n} \{a\phi(x_i)\} p_i$

$= \sum_{i=1}^{n} a\phi(x_i)p_i$

$= a\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)p_i$

$= a\ E\{\phi(x)\}.$

(iv) $E(ax+b) = aE(x)+b$;

Proof $E(ax+b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i+b)p_i$

$= \sum_{i=1}^{n} ax_i\cancel{p_i} + \sum_{i=1}^{n} bp_i$

$= a\sum_{i=1}^{n} x_ip_i + \cancel{b}\sum_{i=1}^{n} p_i$

$= aE(x) + b\cdot 1$

$= aE(x) + b.$

(v) $E(x-\mu) = 0.$

34 Proof $E(x-\mu) = E(x) - E(\mu)$, (μ ধ্রুবক)

$= \mu - \mu$

$= 0.$

(vi) $Var(ax) = a^2 var(x)$

Proof $Var(ax) = E(ax-a\mu)^2$

$= a^2 E(\cancel{x}-\mu)^2$

$= a^2 Var(x).$

(vii) $Var(a\cancel{x}+b) = a^2 Var(x)$

Proof $Var(ax+b) = E\{(a\cancel{x}+b) - (a\mu+b)\}^2$

$= E\{ax+b-a\mu-b\}^2$

$= E(ax-a\mu)^2$

$= a^2 E(x-\mu)^2$

$= a^2 Var(X)$

Note $Var(X)$ ৰ সংজ্ঞা তলত দিয়া ধৰণে সৰলীকৰণ কৰিব পৰা যায়:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 p_i - 2\mu x_i p_i + \mu^2 p_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2\mu \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2\mu \cdot \mu + \mu^2 \cdot 1 \qquad \left(\because \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \mu, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2.$$

এইটোৱেই সৰলীকৃত ৰূপ।

∴ আমি লিখিব পাৰো:

(1) $Var(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \right)^2$

or (2) $Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2$.

Ex 1 তলৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনটোৰ সহায়ত যাদৃচ্ছিক চলক X ৰ প্ৰসৰণ উলিওৱা। $Var(2x-3)$ মান কিমান?

Sol^n

X:	-1	0	1	2
$P(X)$:	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}$

(মনকৰা: $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{5}{16} = 1$)

Sol^n

মাধ্য $\mu = E(X)$

$$= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

$$= (-1) \times \frac{1}{16} + 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{5}{16}$$

$$= \frac{8 + 10 - 1}{16}$$

$$= \frac{17}{16}$$

$$E(x^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{16} + 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{5}{16}$$

$$= \frac{1}{16} + 0 + \frac{1}{2} + \frac{20}{16}$$

$$= \frac{29}{16}$$

$$\operatorname{var} x = E(x^2) - \{E(x)\}^2$$
$$= \frac{29}{16} - \left(\frac{17}{16}\right)^2$$
$$= \frac{175}{256}$$

$$\operatorname{Var}(2x-3) = 2^2 \times \operatorname{Var}(x)$$
$$= 4 \times \frac{175}{256}$$
$$= \frac{175}{64}$$

— x —

উদা 2 এটা নিখুঁত লুডুগুটি দলিয়াই পোৱা সংখ্যাৰ প্ৰসৰণ নিৰ্ণয় কৰা:

<u>Sol</u>

Solⁿ প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
গুটি দলিয়াই পোৱা সংখ্যাক x ৰে বুজোৱা হ'ল। তেতিয়া X এটা যাদৃচ্ছিক চলক হ'ব আৰু ইয়াৰ মানবোৰ 1, 2, 3, 4, 5 আৰু 6.

36 আকৌ প্ৰতিটো সংখ্যা পোৱাৰ সম্ভাৱিতা $= \frac{1}{6}$.
∴ X ৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো

X :	1	2	3	4	5	6
$p(x)$:	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\therefore E(x) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i$$
$$= 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6}$$
$$= \frac{21}{6}$$

$$E(x^2) = 1^2\times\frac{1}{6} + 2^2\times\frac{1}{6} + 3^2\times\frac{1}{6} + 4^2\times\frac{1}{6} + 5^2\times\frac{1}{6} + 6^2\times\frac{1}{6}$$
$$= \frac{91}{6}$$

$$\therefore \operatorname{var}(x) = E(x^2) - \{E(x)\}^2$$
$$= \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2$$
$$= \frac{91}{6} - \frac{441}{36}$$
$$= \frac{35}{12}.$$

প্ৰামাণিক বিচলন $= \sigma_x = +\sqrt{\frac{35}{12}}$

Ex 3. এটা ৰেণ্ডম ভেৰিয়েবল ~~X~~ ৰ সম্ভাৱিতা তালিকাখন

x_i :	-2	-1	0	1	2	3
p_i :	0.1	k	0.2	$2k$	0.3	k

(i) k ৰ মান (ii) $E(x)$ ৰ মান আৰু (iii) প্ৰসৰণ উলিওৱা।

Soln (i) প্ৰশ্নমতে, $0.1+k+0.2+2k+0.3+k=1$

$$\Rightarrow 4k = 0.4 \Rightarrow k = 0.1.$$

(ii) আৰু (iii) নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰৰ বাবে আমি তলৰ তালিকাখন প্ৰস্তুত কৰিব পাৰো:

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
-2	0.1	-0.2	0.4
-1	0.1	-0.1	0.1
0	0.2	0	0
1	0.2	0.2	0.2
2	0.3	0.6	1.2
3	0.1	0.3	0.9
		$\Sigma p_i x_i = 0.8$	$\Sigma p_i x_i^2 = 2.8$

(ii) মাধ্য $= \Sigma p_i x_i = 0.8$

(iii) প্ৰসৰণ $= \Sigma p_i x_i^2 - (\Sigma p_i x_i)^2$

$$= 2.8 - (0.8)^2$$

$$= 2.8 - 0.64$$

$$= 2.16$$

Ans.

Ex 4 দুটা মুদ্ৰা নিক্ষেপ কৰা কাৰ্যৰ পৰা মুণ্ডপ্ৰাপ্তিৰ মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ উলিওৱা।

Soln ধৰো X যে প্ৰাপ্ত মুণ্ডৰ সংখ্যাক বুজায়।
$\therefore X$ এটা যাদৃচ্ছিক চলক আৰু ই $0, 1, 2$ মান ল'ব পাৰে।

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$P(X=0) = P($এটাও মুণ্ড নহকা ঘটনা$)$
$= P($দুয়োটা পুচ্ছ পোৱা ঘটনা$)$
$= P(TT)$
$= \frac{1}{4}$.

$P(X=1) = P($এটা মুণ্ড পোৱা ঘটনা$)$

$= P($প্ৰথম বাৰ H, 2nd বাৰ T নাইবা 1st বাৰ T, 2nd বাৰ H$)$

$= P(\{HT, TH\})$

$= \frac{2}{4}$.

$P(X=2) = P($দুয়োবাৰেই H পোৱা ঘটনা$)$

$= P(HH)$

$= \frac{1}{4}$.

∴ সম্ভাৱিতা বণ্টন তালিকা

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

এতিয়া তলৰ তালিকাখন প্ৰস্তুত কৰা হওক।

$X(x_i)$	$P(x)$ p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	$\frac{1}{4}$	0	0
1	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{4}$
		$\sum p_i x_i = 1$	$\sum p_i x_i^2 = \frac{3}{2}$

∴ $E(X) = \sum p_i x_i = 1$

$Var(X) = \sum p_i x_i^2 - \{\sum p_i x_i\}^2$

$= \frac{3}{2} - 1$

$= \frac{1}{2}$ Ans.

মন কৰিবলগীয়া

সংহতি বা ঘটনা এটাৰ সম্ভাৱিতা লিখিব যাওতে আমি { } চিনটো অগ্ৰাহ্য কৰিছো। $P(\{HH\})$ ৰ ঠাইত $P(HH)$ লিখিছো। $P(\{HT, TH\})$ ৰ ঠাইত $P(HT, TH)$ লিখিছো। এই style টো গ্ৰহণযোগ্য।

Ex 5 তিনিটা মুদ্ৰা একেসময়তে টছ কৰা হ'ল। মুণ্ডৰ সংখ্যাৰ মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ উলিওৱা।

Soln. ধৰা হ'ল X য়ে মুণ্ডৰ সংখ্যা বুজাইছে। X এটা যাদৃচ্ছিক চলক আৰু ইয়াৰ মানবোৰ $0, 1, 2, 3$,

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$$

$P(x=0) = P(TTT) = \frac{1}{8}$

$P(x=1) = P(TTH, THT, HTT) = \frac{3}{8}$

$P(x=2) = P(HHT, HTH, THH) = \frac{3}{8}$

$P(x=3) = P(HHH) = \frac{1}{8}$.

তলৰ তালিকাখন প্ৰস্তুত কৰা হওক।

x_i	$p_i = P(x=x_i)$	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	1/8	0	0
1	3/8	$\frac{3}{8}$	3/8
2	3/8	$\frac{6}{8}$	$\frac{12}{8}$
3	1/8	$\frac{3}{8}$	9/8

$\Sigma p_i x_i = 3/2$ $\quad \Sigma p_i x_i^2 = 3$

$\therefore E(x) = \mu = \Sigma p_i x_i = \frac{3}{2}$

$\sigma^2 = Var(x) = \Sigma p_i x_i^2 - \{\Sigma p_i x_i\}^2$

$= 3 - \frac{9}{4}$

$= \frac{3}{4}$

মানক বিচলন $= \sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ans

Ex দুটা লুডুগুটি একেসময়তে খেলা হ'ল। X য়ে 6 পোৱা ঘটনাটো বুজালে X ৰ মাধ্য আৰু মানক বিচলন উলিওৱা।

Soln X য়ে $0, 1$ আৰু 2 মান ল'ব পাৰে।

$P(x=0) = P($6 নোপোৱা ঘটনা$)$

$= P($দুয়োটাতে 1,2,3,4,5 ৰ কিবা এটা পোৱা ঘটনা$)$

$= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

~~P(x=1) = P(এটা 6 পোৱা ঘটনা)~~

~~= P(এটা 6 আৰু এটা 5,4,3,2,1 ৰ যিকোনো এটা পোৱা ঘটনা)~~

$= \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} +$

$P(X=1) = P($এটা 6 পোৱাৰ ঘটনা$)$

$= P($প্ৰথম গুটিটোত 6 আৰু দ্বিতীয় গুটিটোত পৰা 1, 2, 3, 4, 5 অথবা প্ৰথম গুটিটোত 1, 2, 3, 4, 5 আৰু দ্বিতীয় গুটিটোত 6$)$

$= \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$

$= \frac{10}{36}$

$P(X=2) = P($প্ৰথম গুটিৰ পৰা 6 আৰু দ্বিতীয় গুটিৰ পৰা 1অথবা2অথবা3অথবা4অথবা5$)$

$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{36}$

এতিয়া তলৰ তালিকাখন প্ৰস্তুত কৰা হওক:

x_i	$P(X=x_i)=p_i$	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
0	$\frac{25}{36}$	0	0
1	$\frac{10}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$
		$\sum x_i p_i = \frac{12}{36}$	$\frac{14}{36}$

$\mu =$ মাধ্য $= \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ Ans; $\sum x_i^2 p_i = \frac{7}{18}$

$\therefore$ প্ৰসৰণ $(\sigma^2) = \sum x_i^2 p_i - \{\sum x_i p_i\}^2$

$= \frac{7}{18} - \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$= \frac{7}{18} - \frac{1}{9}$

$= \frac{7-2}{18}$

$= 5/18$ Ans

মানক বিচ্যুতি $\sigma = \sqrt{5/18}$

$= \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{10}}{6}$ Ans

প্ৰশ্ন7 প্ৰথম ছয়টা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাবোৰৰ পৰা পুনৰ্স্থাপন নকৰাকৈ যাদৃচ্ছিকভাৱে দুটা সংখ্যা বাছনি কৰা হ'ল। X য়ে প্ৰাপ্ত সংখ্যা দুটাৰ বৃহত্তৰটোক সূচালে E(X) আৰু var(X) উলিওৱা।

Sol^n প্ৰথম ছয়টা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা 1, 2, 3, 4, 5, 6.

∴ X য়ে লব পৰা মানবোৰ 2, 3, 4, 5, 6.

$$P(X=2) = \cancel{P(\{1,2\})} = P(\{1,2\} \cup \{2,1\})$$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{5}$$

$$= \frac{2}{30}$$

(পুনৰ্স্থাপন নকৰাৰ বাবে প্ৰথটো লোৱাৰ পাছত মুঠ সংখ্যা 6 ৰ পৰা 5 হ'ব)

$$P(X=3) = P(\text{লোৱা সংখ্যা দুটাৰ মাজৰ ডাঙৰটো } 3)$$

$$= P(\{1,3\} \cup \{3,1\}, \{2,3\}, \{3,2\})$$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{5}$$

$$= \frac{4}{30}$$

$$= \frac{2}{15}$$

$$P(X=4) = P(\{1,4\} \cup \{4,1\} \cup \{2,4\} \cup \{4,2\}, \{3,4\}, \{4,3\})$$

$$= \frac{6}{30}$$

$$P(X=5) = P(\{1,5\} \cup \{5,1\}, \{5,2\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{5,3\}, \{4,5\}, \{5,4\})$$

$$= \frac{8}{30}$$

$$P(X=6) = P(\{1,6\}, \{6,1\}, \{6,2\}\{2,6\}, \{3,6\}\{6,3\}, \{4,6\}\{6,4\}\ \{6,5\}\{5,6\})$$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{5}$$

$$+ \frac{1}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{5}$$

$$= \frac{10}{30}$$

~~Ans~~ :

∴ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ব

x:	2	3	4	5	6
$P(x)$:	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{10}{30}$

$E(x)$ আৰু $Var(x)$ নিৰ্ণয়ৰ বাবে তলৰ তালিকাখন প্ৰস্তুত কৰা হওক

x_i	$P(x=x_i)=p_i$	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$
3	$\frac{2}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{18}{15}$
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{5}$
5	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{100}{15}$
6	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{36}{3}$
		$\sum x_i p_i = \frac{14}{3}$	$\sum x_i^2 p_i = \frac{70}{3}$

4
18
48
100
180
$\overline{350}$

$\frac{\cancel{350}^{70}}{\cancel{15}_{3}}$

$\begin{array}{r} 14 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$

$$\therefore E(x) = \mu = \frac{14}{3}$$

$$V(x) = \sigma_x^2 = \sum x_i^2 p_i - (\mu)^2$$

$$= \frac{70}{3} - \frac{196}{9}$$

$$= \frac{210-196}{9}$$

$$= \frac{14}{9}$$

$\therefore$ মানক বিচলন $= \sigma_x = \frac{\sqrt{14}}{3}$

Ans: মাধ্য $= \frac{14}{3}$, প্ৰসৰণ $= \frac{14}{9}$, মানক বিচলন $= \frac{\sqrt{14}}{3}$.