$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.5. Transpose of Matrix.

মৌলকক্ষৰ পক্ষান্তৰ :

এটা মেট্ৰিক্স A ৰ স্তম্ভবোৰ শাৰীলৈ আৰু শাৰীবোৰ স্তম্ভলৈ পৰিবৰ্তন কৰি পোৱা matrix A^T বা A' ক পক্ষান্তৰ মৌলকক্ষ বোলে।

Ex $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

3.5.1 পক্ষান্তৰ মৌলকক্ষৰ ধৰ্ম :

(Properties of transpose of the matrix.)

(i) $(A')' = A$ (পক্ষান্তৰ মৌলকক্ষৰ পক্ষান্তৰ কৰিলে প্ৰকৃত মৌলকক্ষটো পোৱা যায়।)

(ii) $\cancel{kA'}$ $(kA)' = kA'$, k এটা ধ্ৰুৱক।

(iii) $(A+B)' = A' + B'$

(iv) $(AB)' = B'A'$ (ভালদৰে A, B, A', B' ৰ অৱস্থান মন কৰা)।

Example 20. $A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ আৰু $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

দেখুওৱা যে মেট্ৰিক্স দুটাৰ ক্ষেত্ৰত পক্ষান্তৰৰ ধৰ্মবোৰ প্ৰযোজ্য।

Sol^n ইয়াত $A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Now, $(A')' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}'$

$$= \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A$$ Proved.

Thus $(A')' = A$. //

(ii) $A+B = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3}-1 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

$(A+B)' = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

Also, $A' + B' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

২১ $$= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$\therefore (A+B)' = A' + B'$.

(iii) $kB = k\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & -k & 2k \\ k & 2k & 4k \end{pmatrix}$

$(kB)' = \begin{pmatrix} 2k & k \\ -k & 2k \\ 2k & 4k \end{pmatrix}$ (যদি k একটি ধ্রুবক)

Also $kB' = k\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & k \\ -k & 2k \\ 2k & 4k \end{pmatrix}$

$\therefore (kB)' = kB'$

(iv) $A'B' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$3 \times 2 \qquad 3 \times 2$

(ইহাতে প্রথম মেট্রিক্সের ~~সারির~~ স্তম্ভের সংখ্যা
≠ দ্বিতীয় " ~~স্তম্ভের~~ সারির সংখ্যা)

$\therefore$ এই ~~[illegible]~~ মেট্রিক্সদ্বয় দুটি পূরণের ক্ষেত্রে উপযোগী (conformable) নয়।

Ex $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

দেখুওৱা যে $(AB)' = B'A'$

Solⁿ. $A' = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$B'A' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}_{3\times 1} \times \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{1\times 3}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ +12 & -24 & -30 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}_{3\times 1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -6 & +12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$\therefore (AB)' = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$\therefore (AB)' = B'A'.$$

3.6 Symmetric and skew symmetric matrices.

সমমিত আৰু বিষম-সমমিত মৌলকক্ষ।

এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ $A = (a_{ij})_{n\times n}$ সমমিত হ'ব যদিহে ইয়াৰ (i,j) তম মৌলটো (j,i) তম মৌলৰ সৈতে একে। অৰ্থাৎ $a_{ij} = a_{ji}$. এই ক্ষেত্ৰত $A' = A$.

যেনে, $\begin{bmatrix} 1 & i & -2i \\ i & -2 & 4 \\ -2i & 4 & 3 \end{bmatrix}$ এটা সমমিত মৌলকক্ষ।

ইয়াত $a_{12}=a_{21}=i$, $a_{13}=a_{31}=-2i$, $a_{23}=a_{32}=4$.

সংজ্ঞা: এটা বৰ্গমৌল কক্ষ $A=(a_{ij})_{n\times n}$ ~~অতিসমমিত~~ ক বিষম-সমমিত মৌলকক্ষ বোলে যদি $a_{ij}=-a_{ji}$. এইক্ষেত্ৰত $A'=-A$.

Note: $a_{ij}=-a_{ji}$

$\Rightarrow a_{ii}=-a_{ii}$ ($i=j$ হ'লে)

$\Rightarrow 2a_{ii}=0$

$\Rightarrow a_{ii}=0$

ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল বিষম সমমিত মৌলকক্ষৰ মুখ্য কৰ্ণ মৌলকক্ষ বোৰ শূণ্য।

১৮ $A=\begin{bmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{bmatrix}$ এটা skew symmetric মৌলকক্ষ।

Theorem:- ধৰা হ'ল A এটা বাস্তৱ সংখ্যা মৌল বিশিষ্ট মৌলকক্ষ। A বৰ্গমৌলকক্ষ হ'লে $A+A'$ টো সমমিত আৰু $A-A'$ বিষম সমমিত মৌলকক্ষ হ'ব।

প্ৰমাণ / Proof: ধৰো $B=A+A'$

এতিয়া $B'=(A+A')'$

$= A'+(A')'$

$= A'+A \quad (\because (A')'=A)$

$= A+A'$

$= B$

$\therefore$ $A+A'$ সমমিত।

ধৰো $C=A-A'$

$\Rightarrow C'=(A-A')'$

$= A'-(A')'$

$= A'-A$

$= -(A-A')$

$= -C$

$\therefore$ $A-A'$ টো Skew Symmetric মৌলকক্ষ।

Theorem যিকোনো বৰ্গমৌলকক্ষক এটা সমমিত আৰু এটা বিষম সমমিত মৌলকক্ষৰ যোগফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

প্ৰমাণ: ধৰা হ'ল A এটা বৰ্গমৌলকক্ষ

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}(A+A') + \frac{1}{2}(A-A')$$

দেখুৱাব পাৰি যে $A+A'$ এটা সমমিত মৌলকক্ষ আৰু $A-A'$ এটা বিষম সমমিত মৌলকক্ষ।

$\Rightarrow \frac{1}{2}(A+A')$ এটা সমমিত আৰু $\frac{1}{2}(A-A')$ এটা বিষম সমমিত মৌলকক্ষ।

$\therefore$ A = সমমিত মৌলকক্ষ + বিষম-সমমিত মৌলকক্ষ

Proved//

Ex. ধৰাহওক A আৰু B দুটা একে মাত্ৰাৰ (আকাৰৰ) সমমিত মৌলকক্ষ। দেখুওৱা যে AB ও সমমিত হ'ব যদি আৰু যদিহে (if and only if) $AB = BA$.

[Note:- সাধাৰণতে মৌলকক্ষক পূৰণত $AB = BA$ নহবও পাৰে]

Proof দিয়া আছে যে A আৰু B সমমিত।

$\therefore A = A', \; B = B'$ ——— (1)

প্ৰথমতে আমি ধৰিলোঁ যে AB সমমিত হয় আৰু প্ৰমাণ কৰিম যে A আৰু B এমবিনিময়ে (অৰ্থাৎ $AB = BA$)

AB সমমিত

$\Rightarrow (AB)' = AB$. ——— (2)

কিন্তু, $(AB)' = B'A'$

$= BA$ ——— (3)

Thus $AB = BA \; (=(AB)')$.

বিপৰীতক্ৰমে আমি এইবাৰ ধৰিম যে $AB = BA$ সম্পৰ্কটো সত্য আৰু প্ৰমাণ কৰিম যে AB টো এটা সমমিত মৌলকক্ষ।

এতিয়া, $(AB)' = B'A'$

$= BA \quad (\because A = A', B = B')$

$= AB \quad (\because AB = BA)$

$\therefore$ ~~AB এটা~~

Thus $(AB)' = AB$. গতিকে AB সমমিত।

Ex $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 3 \\ 2 & b & -1 \\ c & 1 & 0 \end{bmatrix}$ বিষম-সমমিত হ'লে $a, b, c = ?$

Solⁿ : A বিষম সমমিত
∴ কৰ্ণৰ মৌলকক্ষ সমূহ 0.
$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$.
আৰু $-a_{12} = a_{21}; -a_{23} = a_{32}; -a_{31} = a_{13}$.
$\therefore a_{22} = b = 0$.
$a = a_{12} = -a_{21} = -2$.
$c = a_{31} = -a_{13} = -3$

Thus $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[Note:- প্ৰশ্নটো বুজি লৈ a, b, c ৰ মান চিধাচিধি লিখিলেই হ'ল।]

Ex দেখুওৱা যে B^TAB সমমিত হ'ব যদি A সমমিত।
20 আৰু B^TAB বিষম সমমিত হ'ব যদি A বিষম সমমিত।

Solⁿ ধৰা হ'ল A সমমিত। $\therefore A' = A$. (A' মানে A^T পক্ষান্তৰ)

এতিয়া $(B^TAB)^T = B^TA^T(B^T)^T$
$\Rightarrow (B^TAB)^T = B^TAB$. $(\because A^T = A)$
$\therefore$ $B'AB$ সমমিত।

আৰু ধৰা হ'ল A বিষম সমমিত।
$\therefore A' = -A$
এতিয়া $(B^TAB)^T = B^TA^T(B^T)^T$
$= -B^TAB$ $(\because A^T = -A)$
$\Rightarrow$ B^TAB বিষম সমমিত।

Q এটা মৌলকক্ষ একে সময়তে সমমিত আৰু বিষম সমমিত হ'ব পাৰেনে?

Solⁿ ধৰো $A = (a_{ij})$ তেনেকুৱা এটা মৌলকক্ষ।
এতিয়া, (a_{ij}) সমমিত ①
$\Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, j$ ($\forall \to$ সকলো মানৰ বাবে)
আৰু (a_{ij}) বিষম সমমিত ②
$\Rightarrow a_{ij} = -a_{ji}$ সকলো i, j ৰ বাবে।

(1) & (2) $\Rightarrow$

$a_{ij} = -a_{ij}$ সকলো i, j ৰ কাৰণে।

$\Rightarrow 2a_{ij} = 0$ " i, j ৰ কাৰণে

$\Rightarrow a_{ij} = 0$ " i, j ৰ কাৰণে।

অৰ্থাৎ A ৰ সকলো প্ৰৱিষ্টিয়েই 0.

$\therefore$ $A = O$, এটা শূন্য- মৌলকক্ষ।

Q. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ক এটা সমমিত আৰু এটা বিষম সমমিত মৌলকক্ষৰ যোগফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰা।

Soln

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$ (শাৰী $\leftrightarrow$ স্তম্ভ)

এতিয়া ধৰো $P = \frac{1}{2}(A+A')$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+2 & -2-1 & -4+1 \\ -1-2 & 3+3 & 4-2 \\ 1-4 & -2+4 & -3-3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

~~আকৌ~~ স্পষ্টত: P এটা সমমিত মৌলকক্ষ।
ইয়াত $a_{ij} = a_{ji}$ (সকলো i, j ৰ কাৰণে)।

আকৌ, ধৰো $Q = \frac{1}{2}(A - A')$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Q এটা বিষম-সমমিত মৌলকক্ষ। ইয়াত $a_{ij} = -a_{ji}$ (সকলো i আৰু j ৰ কাৰণে).

(2018) তলৰ মৌলকক্ষটো এটা সমমিত আৰু এটা বিষম সমমিত মৌলকক্ষৰ যোগফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰা। — 4

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Q. দুটা মৌলকক্ষ A আৰু B লিখা যাতে

(i) $A \neq 0$, $B \neq 0$, $AB = 0$, $BA \neq 0$

(ii) $A \neq 0$, $B \neq 0$, $AB = 0$, $BA = 0$.

(i) ধৰা $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

তেন্তে $A \neq 0$, $B \neq 0$

কিন্তু $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

আৰু $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

তেন্তে $A \neq 0$, $B \neq 0$,

কিন্তু $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$

Elementary Operation (transformation) of a Matrix :-

প্ৰাথমিক ৰূপান্তৰণ :-

(i) দুটা শাৰী বা স্তম্ভৰ বিনিময়

(2) কোনো শাৰী (বা স্তম্ভৰ) মৌলবোৰক কোনো অশূন্য আদিশেৰে পূৰণ।

(3) কোনো শাৰী বা স্তম্ভৰ মৌলবোৰক কোনো অশূন্য আদিশেৰে পূৰণ কৰি আন এটা শাৰী বা স্তম্ভৰ অনুৰূপ মৌলৰ লগত যোগ।