মৌলকক্ষ

আমি পালো $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

য'ত C_{ij} বোৰ হ'ল a_{ij}'ৰ সহৰাশি।

4.6 Adjoint and Inverse of a matrix :

(সহগ্ৰন্থি আৰু মৌলকক্ষৰ প্ৰতিলোম)

ধৰা হওক $A = (a_{ij})_{n \times n}$ এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ।
তেন্তে আৰু a_{ij} ৰ সহৰাশি A_{ij}. তেনেক্ষেত্ৰত A_{ij} সমূহক মৌল হিচাপে লৈ পোৱা $[A_{ij}]_{n \times n}$ মৌলকক্ষক পক্ষান্তৰ কৰি পোৱা মৌলকক্ষক A মৌলকক্ষৰ সহগ্ৰন্থি বা সহযুক্ত বোলে আৰু ইয়াক adj A হিচাপে লিখা হয়।

ধৰা হ'ল $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ তেন্তে $\text{Adj} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Q $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ৰ adj A উলিওৱা।

Soln ইয়াত 2 ৰ সহৰাশি $= 4 = A_{11}$
3 ৰ " $= A_{12} = -1$
1 ৰ " $= A_{21} = -3$
4 ৰ " $= A_{22} = 2$

$$\therefore \text{adj} A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ Ans.}$$

2×2 matrix ৰ সহৰাশি-সহগ্ৰন্থি উলিওৱা

Note: প্ৰথমে A ৰ পক্ষান্তৰ কৰি তাৰ পাছত সহৰাশি বলুৱালেও একেই উঃ পোৱা যাব।

৪ তলৰ মেট্ৰিক্সটোৰ সহগুণ্ঠি (adjoint) উলিওৱা।

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

~~ইয়াত $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -20+2=18$~~

ইয়াত ২ৰ সহৰাশি $= A_{11} = +\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -20+2 = -18$

3ৰ সহৰাশি $= A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0-2 = -2$

-4ৰ " $= A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0+4 = 4$

0ৰ " $= A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 15-4 = 11$

-4ৰ " $= A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10+4 = 14$

2ৰ " $= A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-3) = 5$

(2) 1ৰ " $= A_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 6-16 = -10$

-1ৰ " $= A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$

5ৰ " $= A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$

$$\therefore \operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} -18 & -2 & 4 \\ 11 & 14 & 5 \\ -10 & -4 & -8 \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} -18 & 11 & -10 \\ -2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

Calculations ভুল থাকিব পাৰে! ভুল চাই ল'বা

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ মৌলকক্ষৰ Adj A উলিওৱা।

ইয়াত, $A_{11} = -6$, $A_{12} = 0$, $A_{13} = 3$

$A_{21} = 5$, $A_{22} = 0$, $A_{23} = -1$

$A_{31} = 14$, $A_{32} = 9$, $A_{33} = -10$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \\ 14 & 9 & -10 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 9 \\ 3 & -1 & -10 \end{bmatrix} \#$$

Thm: A এটা n মাত্ৰাৰ বৰ্গ মৌলকক্ষ হ'লে,

$$A\cdot(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = |A|I.$$

য'ত I হ'ল n মাত্ৰাৰ একক মৌলকক্ষ।

ব্যাখ্যা: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Now, $A\cdot(\text{adj}A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A|\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|I.$

একেদৰে, দেখুৱাব পাৰি যে

$$(\text{adj}A)A = |A|I.$$

(3) সংজ্ঞা: যদি A এটা বৰ্গাকাৰ মৌলকক্ষ আৰু $|A|=0$, তেনেহ'লে A ক অপ্ৰতিম মৌলকক্ষ (Singular matrix) বুলি কোৱা হয়।

যদি $|A| \neq 0$, তেনেহ'লে A ক অনপ্ৰতিম মৌলকক্ষ (non singular matrix) বোলে।

Ex $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ হ'লে $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12-12 = 0$

$\therefore$ A অপ্ৰতিম মৌলকক্ষ (চিংগুলাৰ)

Ex $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ হ'লে $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 21-5 = 16 \neq 0$

B এটা অনপ্ৰতিম মৌলকক্ষ।

Thm এটা মৌলকক্ষ প্ৰতিলোমনীয় হয় যদি আৰু যদিহে এইটো অনপ্ৰতিম (non-singular).

Proof ধৰাহ'ল A এটা n মাত্ৰাৰ প্ৰতিলোমনীয় মৌলকক্ষ। তেনেহ'লে আন এটা মৌলকক্ষ B পোৱা যাব যাতে

$$AB = BA = I.$$

$$\Rightarrow |AB| = |BA| = |I|$$

or, $|A|\,|B| = 1$ $\quad \because |AB| = |A|\,|B|,\ |I| = 1$

$\Rightarrow |A| \neq 0$ $\quad \therefore$ A টো নন-চিংগুলাৰ।

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰো A non-singular.

$\Rightarrow |A| \neq 0$

Now, $A \cdot \text{adj}A = (\text{adj}A)A = |A|I$. —— ①

$\Rightarrow A\left(\frac{1}{|A|}\text{adj}A\right) = \left(\frac{1}{|A|}\text{adj}A\right) = I$.

$\Rightarrow AB = BA = I$. $\quad$ যত $B = \frac{1}{|A|}\text{adj}A$ ধৰা হৈছে।

$\Rightarrow B = \frac{1}{|A|}\text{adj}A$.

$\Rightarrow$ A প্ৰতিলোমনীয় আৰু $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A$.

(4) Ex. যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ এটা মৌলকক্ষ হ'লে A^{-1} উলিওৱা।

Step 1 : A এটা non singular মৌলকক্ষ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(16-9) - 3(4-3) + 3(3-4) = 1 \neq 0$$

$\therefore$ A মৌলকক্ষটো অনপ্ৰতিম।

আকৌ সহৰাশিবোৰ $A_{11} = 7,\ A_{12} = -1,\ A_{13} = -1$

$A_{21} = -3,\ A_{22} = 1,\ A_{23} = 0$

$A_{31} = -3,\ A_{12} = 0,\ A_{33} = 1$.

Therefore, $\text{adj}A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

এতিয়া, $A.(\text{adj}A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 7-3-3 & -3+3+0 & -3+0+3 \\ 7-4-3 & -3+4+0 & -3+0+3 \\ 7-3-4 & -3+3+0 & -3+0+4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|I.$$

একেদৰে $A.(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = |A|I$.

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$.

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

<u>Ex</u>. $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ হ'লে A^{-1} উলিওৱা।

<u>Solⁿ</u>

$$|A| = 8\times(72-8) - 4(16-4) + 2(4-9) = 454 \neq 0$$

$\therefore$ A মৌলকক্ষটো- নন চিংগুলাৰ (অনন্যতম). গতিকে A^{-1} বৰ্তে।

এতিয়া, $A_{11} = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 64$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -12$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -28$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 62$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -12$.

$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -2$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -28$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 64$

(5) $\cancel{\operatorname{Adj} A}$ $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 64 & -12 & -5 \\ -28 & 62 & -12 \\ -2 & -28 & 64 \end{pmatrix}^T$

$$= \begin{pmatrix} 64 & -28 & -2 \\ -12 & 62 & -28 \\ -5 & -12 & 64 \end{pmatrix} \text{ Ans.}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A = \frac{1}{454}\begin{bmatrix} 64 & -28 & -2 \\ -12 & 62 & -28 \\ -5 & -12 & 64 \end{bmatrix} \text{ Ans.}$$