Relation and function সম্বন্ধ আৰু ফলন

সম্বন্ধ (relation) শব্দৰ লগত আমাৰ চিনাকি আছে। গণিতত আমি যেতিয়া কওঁ যে $a<b$ তেতিয়া '<' এটা সম্বন্ধ। তেনেদৰে '=', '≠', '>' ≮ ≯ আদি সম্বন্ধ। সম্বন্ধক R ৰে সূচালে আমি লিখিব পাৰিম aRb, ধৰাহ'ল অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিত '<' চিন সম্বন্ধক R ৰে সূচিত কৰিলো। আমি লিখিব পাৰো।

$2R3$, $5R9$, $6R7$ আদি।

Def^n. ~~R~~ ধৰাহ'ল S এটা অৰিক্ত সংহতি আৰু R ইয়াৰ এটা সম্বন্ধ। তেন্তে R ক কাৰ্টেজীয় পূৰণৰ সংহতি $S\times S$ ৰ এটা উপসংহতি হিচাপে গণ্য কৰিব পাৰো। আমি জানো যে $S\times S$ ৰ মৌলবোৰ ~~আৰি~~ আহি (a,b) ধৰণৰ।

আমি aRb হিচাপে অথবা $(a,b)\in R$ হিচাপে এটা সম্বন্ধক প্ৰদৰ্শন কৰিব পাৰো।

Def^n শূন্য সম্বন্ধ:- যদি $R=\phi\subseteq A\times A$,

Def^n সাৰ্বিক সম্বন্ধ:- যদি $R=A\times A$,

Ex. $R=\{(a,b): a-b=10\}$

$S=\{1,2,3,4\}$ সংহতিত ~~R সংহতিটো এটা ৰিক্ত~~ R সম্বন্ধটো এটা শূন্য বা ৰিক্ত সম্বন্ধ।

$R_1=\{(a,b): a-b=2\}$ সম্বন্ধটো ৰিক্ত নহয়।

তিনি ধৰণৰ সম্বন্ধ পোৱা যায়:—

(1) Reflexive বা প্ৰতিফলনীয়: ধৰাহ'ল S এটা অৰিক্ত সংহতি আৰু R ইয়াৰ ওপৰত এটা সম্বন্ধ। ইয়াক প্ৰতিফলনীয় বুলি কোৱা হ'ব যদি $aRa\ \forall a\in S$, অথবা $(a,a)\in R$.

উদাহৰণ স্বৰূপে S যদি সৰল ৰেখাৰ সংহতি তেন্তে ∥ (সমান্তৰাল সম্বন্ধটো এটা প্ৰতিফলনীয় সম্বন্ধ).

কাৰণ সকলো ৰেখাই নিজৰে লগত সমান্তৰাল।
তেনেদৰে ত্ৰিভুজৰ সংহতিত 'সদৃশ' সম্পৰ্কটো প্ৰতিফলনীয়।

II Symmetric (সমমিত সম্পৰ্ক) :
যদি $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R \;\forall\, a,b \in R$
তেন্তে সম্পৰ্কটো সমমিত।

'উপৰত' কৈ অহা সৰল ৰেখাৰ সংহতিত $\parallel$ সম্পৰ্কটো সমমিত। কাৰণ AB ৰেখাডাল CD ৰেখাৰ সমান্তৰাল হ'লে CD ৰেখাডালো AB ৰ সমান্তৰাল হয়।
তেনেকৈ, AB ৰেখা CD ৰেখাৰ $\perp$ (লম্ব) হ'লে, CD ৰেখাও AB ৰেখাৰ লম্ব। গতিকে 'লম্ব' সম্পৰ্কটো সমমিত।
'পুত্ৰ' সম্পৰ্কটো সমমিত নহয় কাৰণ X মানুহজন Y মানুহজনৰ পুত্ৰ হ'লে Y মানুহজন X মানুহজনৰ পুত্ৰ হ'ব নোৱাৰে।
'$<$', '$>$' আদি সমমিত সম্পৰ্ক নহয়।

III Transitive (সংক্ৰমণীয়) সম্পৰ্ক।
যদি aRb and bRc $\Rightarrow$ aRc তেন্তে সম্পৰ্কটো সংক্ৰমণীয়।
'সমান্তৰাল' সম্পৰ্কটো সৰলৰেখাৰ ক্ষেত্ৰত সংক্ৰমণীয়। কাৰণ $AB \parallel CD$ আৰু $CD \parallel XY$ হ'লে $AB \parallel XY$ হ'ব।
'লম্ব' সম্পৰ্কটো সংক্ৰমণীয় নহয়,
x ৰেখাডাল y ৰেখাৰ লম্ব, y ৰেখাডাল z ৰেখাৰ লম্ব হ'লে x ৰেখাডাল z ৰেখাৰ লম্ব হ'ব নোৱাৰে।
অৰ্থাৎ $x \perp y \;\&\; y \perp z \not\Rightarrow x \perp z$.

সমমূল্যতা সম্পৰ্ক (equivalence ইকুইভেলেন্স).
এটা সম্পৰ্ক R ক সমমূল্যতা সম্পৰ্ক বুলি কোৱা হ'ব যদিহে R সম্পৰ্কটো প্ৰতিফলনীয়, সমমিত আৰু সংক্ৰমণীয়।

Ex. ধৰা হওক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি I, m এটা নিৰ্দিষ্ট মৌল। aRb বুলিলে আমি বুজিম যে m ৰে $a-b$ ক হৰণ যায়। দেখুওৱা লাগে যে R টো এটা সমমূল্যতা সম্বন্ধ।

Soln (i) m এটা অখণ্ড সংখ্যা।

$\Rightarrow$ m ৰে 0 ক হৰণ যায়. (ie বাকীশূন্য)

$\Rightarrow$ m ৰে $a-a$ ক হৰণ যায়, যত $a \in I$

$\Rightarrow$ aRa. (অৰ্থাৎ R প্ৰতিফলনীয়)

II ধৰা aRb

$\Rightarrow$ m ৰে $a-b$ ক হৰণ যায়

$\Rightarrow$ m ৰে $-(b-a)$ " " "

$\Rightarrow$ m ৰে $b-a$ " " "

$\Rightarrow$ bRa

অৰ্থাৎ R সমমিত

III ধৰা aRb আৰু bRc যত $a, b, c \in I$

$\Rightarrow$ m ৰে $a-b$ ক হৰণ যায় আৰু m ৰে $b-c$ ক হৰণ যায়

$\Rightarrow$ m ৰে $(a-b)+(b-c)$ ক হৰণ যায়।

$\Rightarrow$ m ৰে $a-c$ ক হৰণ যায়

$\Rightarrow$ ~~a~~ aRc

অৰ্থাৎ R প্ৰতিফলনীয়।

∴ R এটা সমমূল্যতা সম্বন্ধ।

সমমূল্যতা বৰ্গ :- (Equivalence class)

ধৰা হওক Z যে অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি বুজাইছে আৰু R এটা সমমূল্যতা সম্বন্ধ যত $aRb \Rightarrow$ 3 ৰে $a-b$ ক হৰণ যায় (বাকীশূন্য)। তেন্তে $\{x \mid x \in Z, xRa\}$ সংহতিটোক Z সংহতিটোৰ এটা সমমূল্যতা বৰ্গ (equivalence class) বুলি কোৱা হয় আৰু [a] হিচাপে লিখা হয়।

অৰ্থাৎ $[a] = \{x \mid x \in Z, xRa\}$

$[0] = \{x \mid x \in \mathbb{Z},$ 3 ৰে $x-0$ ক হৰণ যায়$\}$

$= \{\cdots -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \cdots\}$

$[1] = \{x \mid x \in \mathbb{Z},$ 3 ৰে $(x-1)$ ক হৰণ যায়$\}$

$= \{\cdots -8, -5, -2, 1, 4, 7, \cdots\}$

$[2] = \{x \mid x \in \mathbb{Z},$ 3 ৰে $(x-2)$ ক হৰণ যায়$\}$

$= \{\cdots -7, -4, -1, 2, 5, 8, \cdots\}$

$[3] = \{\cdots -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9 \} = [0]$

এই ক্ষেত্ৰত ~~[4] = [1], [5] = [2] আদি~~

$[0] = [3]$, $[1] = [4]$ আদি

$[2] = [5]$, $[3] = [6]$ "

সুতৰাং 3 মাপাংকীয় সমতা সাপেক্ষে পৃথক সমতুল্যতা বৰ্গ তিনিটা: $[0]$, $[1]$ & $[2]$

আৰু- $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2]$. (কেনেকৈ)

HW. $m = 3$ নলৈ 5 ললে কি হ'ব?

মন কৰিলে দেখা যায়, $[0] \cap [1] = \phi$

$[0] \cap [2] = \phi$

$[1] \cap [2] = \phi$.

এনেদৰে, এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ R য়ে এটা সংহতি S ক এনেদৰে ~~ভাগ কৰে যে কিছুমান~~ কিছুমান সমতুল্যতা বৰ্গত ভাগ কৰে যাতে-

(1) $a \in [a] \quad \forall a \in S$.

(2) $b \in [a] \Rightarrow [b] = [a]$

(3) $[a] \cap [b] \neq \phi \Rightarrow [a] = [b]$

(4) $\bigcup [a] = S$.

Ex $S = \{1,2,3\}$

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3)\}$

ইয়াত R প্ৰতিফলনীয়, কিন্তু সমমিত আৰু সংক্ৰমণীয় নহয়।

Soln. ইয়াত, $1,2,3 \in S$ আৰু $(1,1), (2,2), (3,3) \in R$ অৰ্থাৎ.

$1R1,\ 2R2,\ 3R3.$

অৰ্থাৎ, $aRa \ \forall a \in S.$,

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয়।

$(1,2) \in R$ কিন্তু $(2,1) \notin R$. গতিকে সমমিত নহয়।

$(1,2),(2,3) \in R$ কিন্তু $(1,3) \notin R$, গতিকে সংক্ৰমণীয় নহয়।

Ex $A = \{1,2,3\}$

হ'লে $R = \{(1,2),(2,1)\}$ সমমিত কিন্তু প্ৰতিফলনীয়/সংক্ৰমণীয় নহয়

Soln ① ~~(1,1)~~ $1,2,3 \in R$ কিন্তু $(1,1),(2,2),(3,3) \notin R$.
গতিকে প্ৰতিফলনীয় নহয়।

② $(1,2) \in R$ আৰু $(2,1) \in R$ অৰ্থাৎ সমমিত।

③ $(1,2),(2,1) \in R$ কিন্তু $(1,1) \notin R$ গতিকে সংক্ৰমণীয় নহয়।

— x

Ex. $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3)\}$ — সমমিত

$R_2 = \{(1,1), (2,2)\}$ সমমিত নহয়।

$R_3 = \{(1,1), (1,2)\}$ সংক্ৰমণীয় হয়; সমমিত, প্ৰতিফলনীয় নহয়

——— x ———

ধৰা হ'ল X এটা অৰিক্ত সংহতি।

K = X ৰ অৰিক্ত উপসংহতিবোৰৰ সংহতি।

তেন্তে K ক এটা Partition বা বিভাজন বোলা হ'ব যদি

(i) K ৰ যিকোনো দুটা বেলেগ সদস্য disjoint বা অসংযুক্ত হয়। আৰু

(২) আটাইবোৰ উপসংহতিৰ মিলন X ৰ সমান।

দেখা যায় যে; সমমূল্যতা সম্পৰ্কৰ ক্ষেত্ৰত,

(i) $a \in [a]$

(ii) $[a] \cap [b] \neq \phi \Rightarrow [a] = [b]$

(iii) $\bigcup_{a \in X} [a] = X$.

∴ সমমূল্যতা সম্পৰ্কই এটা বিভাজন নিৰূপণ কৰে।