Ex. ধৰা হওক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি I, m এটা নিৰ্দিষ্ট মৌল। aRb বুলিলে আমি বুজিম যে m ৰে $a-b$ ক হৰণ যায়। দেখুৱাব লাগে যে R টো এটা সমমূল্যতা সম্বন্ধ।

Sol^n (i) m এটা অখণ্ড সংখ্যা।

$\Rightarrow$ m ৰে 0 ক হৰণ যায়. (i.e বাকীশূন্য)

$\Rightarrow$ m ৰে $a-a$ ক হৰণ যায়, য'ত $a \in I$

$\Rightarrow$ aRa. (অৰ্থাৎ R প্ৰতিফলনীয়)

II ধৰা aRb

$\Rightarrow$ m ৰে $a-b$ ক হৰণ যায়

$\Rightarrow$ m ৰে $-(b-a)$ " " "

$\Rightarrow$ m ৰে $b-a$ " " "

$\Rightarrow$ bRa

অৰ্থাৎ R সমমিত

III ধৰা aRb আৰু bRc য'ত $a, b, c \in I$

$\Rightarrow$ m ৰে $a-b$ ক হৰণ যায় আৰু m ৰে $b-c$ ক হৰণ যায়

$\Rightarrow$ m ৰে $(a-b)+(b-c)$ ক হৰণ যায়।

$\Rightarrow$ m ৰে $a-c$ ক হৰণ যায়

$\Rightarrow$ ~~a~~ aRc

অৰ্থাৎ R প্ৰতিফলনীয়।

$\therefore$ R এটা সমমূল্যতা সম্বন্ধ।

সমমূল্যতা বৰ্গ :- (Equivalence class)

ধৰা হওক Z যে অখণ্ডসংখ্যাৰ সংহতি বুজাইছে আৰু R এটা সমমূল্যতা সম্বন্ধ য'ত aRb $\Rightarrow$ 3 ৰে $a-b$ ক হৰণ যায় (বাকীশূন্য)। তেন্তে $\{x \mid x \in Z, xRa\}$ সংহতিটোক Z সংহতিটোৰ এটা সমমূল্যতা বৰ্গ (equivalence class) বুলি কোৱা হয় আৰু [a] হিচাপে লিখা হয়।

অৰ্থাৎ $[a] = \{x \mid x \in Z, xRa\}$.

$\therefore [0] = \{x \mid x \in \mathbb{Z},$ 3 ৰে $x-0$ ক হৰণ যায়$\}$

$= \{\ldots -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$

$[1] = \{x \mid x \in \mathbb{Z},$ 3 ৰে $(x-1)$ ক হৰণ যায়$\}$

$= \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$

$[2] = \{x \mid x \in \mathbb{Z},$ 3 ৰে $(x-2)$ ক হৰণ যায়$\}$

$= \{\ldots -7, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$

$[3] = \{\ldots -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9 \} = [0]$

এই দৰে ~~[4] = [1], [5] = [2] আদি~~

$[0] = [3]$, $[1] = [4]$ আদি

$[2] = [5]$, $[3] = [6]$ "

সেয়েহে 3 মাপাংকীয় সমতা সাপেক্ষে পৃথক সমতুল্যতা বৰ্গ তিনিটা : $[0], [1]$ & $[2]$

আৰু $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2]$. (কেনেকৈ)

HW. $m = 3$ নললৈ 5 ললে কি হ'ব?

মন কৰিলে দেখা যাব; $[0] \cap [1] = \phi$

$[0] \cap [2] = \phi$

$[1] \cap [2] = \phi$.

এনেদৰে, এটা সমতুল্য সম্বন্ধ R য়ে এটা সংহতি S ক এনেদৰে ~~ভাগ কৰে যে কিছুমান~~ কিছুমান ~~[a]~~ $[a]$ সমতুল্যতা বৰ্গত ভাগ কৰে যাতে

(1) $a \in [a] \quad \forall a \in S$.

(2) $b \in [a] \Rightarrow [b] = [a]$

(3) $[a] \cap [b] \neq \phi \Rightarrow [a] = [b]$

(4) $\bigcup [a] = S$.

Ex $S = \{1, 2, 3\}$

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3)\}$

ইয়াত R প্ৰতিফলনীয়, কিন্তু সমমিত আৰু সংক্ৰমণীয় নহয়।

Solⁿ. ইয়াত, $1, 2, 3 \in S$ আৰু $(1,1), (2,2), (3,3) \in R$ অৰ্থাৎ.

$1R1, 2R2, 3R3$.

অৰ্থাৎ, $aRa \ \forall a \in S$,

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয়।

$(1,2) \in R$ কিন্তু $(2,1) \notin R$. গতিকে সমমিত নহয়।

$(1,2), (2,3) \in R$ কিন্তু $(1,3) \notin R$, গতিকে সংক্ৰমণীয় নহয়।

Ex $A = \{1, 2, 3\}$

হ'লে $R = \{(1,2), (2,1)\}$ সমমিত কিন্তু প্ৰতিফলনীয়/সংক্ৰমণীয় নহয়

Solⁿ ① ~~(1,1)~~ $1, 2, 3 \in R$ কিন্তু $(1,1), (2,2), (3,3) \notin R$.

গতিকে প্ৰতিফলনীয় নহয়।

② $(1,2) \in R$ আৰু $(2,1) \in R$ অৰ্থাৎ সমমিত।

③ $(1,2), (2,1) \in R$ কিন্তু $(1,1) \notin R$ গতিকে সংক্ৰমণীয় নহয়

— x

Ex. $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3)\}$ — সমমিত

$R_2 = \{(1,1), (2,2)\}$ সমমিত নহয়।

$R_3 = \{(1,1), (1,2)\}$ সংক্ৰমণীয় হয়; সমমিত, প্ৰতিফলনীয় ন

— x —

ধৰা হ'ল X এটা অৰিক্ত সংহতি।
K = X ৰ অৰিক্ত উপসংহতিবোৰৰ সংহতি।
তেন্তে K ক এটা Partition বা বিভাজন বোলা হ'ব যদি
(i) K ৰ যিকোনো দুটা বেলেগ সদস্য – disjoint বা অসংযুক্ত হয়। আৰু
(2) আটাইবোৰ উপসংহতিৰ মিলন X ৰ সমান।
দেখা যায় যে; সমমূল্যতা সম্পৰ্কৰ ক্ষেত্ৰত,
(i) $a \in [a]$
(ii) $[a] \cap [b] \neq \phi \Rightarrow [a] = [b]$
(iii) $\bigcup_{a \in X} [a] = X$.
∴ সমমূল্যতা সম্পৰ্কই এটা বিভাজন নিৰূপণ কৰে।

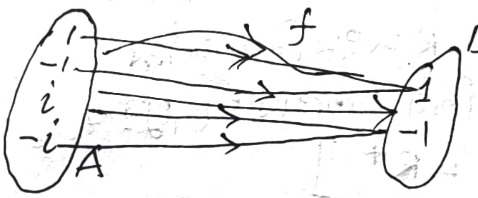
বিপৰীত সম্পৰ্ক: A ৰ পৰা B লৈ থকা সম্পৰ্ক R হ'লে ইয়াৰ বিপৰীত সম্পৰ্ক R^{-1} হ'ল B ৰ পৰা A লৈ থকা এটা সম্পৰ্ক যাতে $R^{-1} = \{(y,x) \mid y \in B, x \in A, (x,y) \in R\}$

Ex Let $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3\}$
$R = \{(a,1), (a,3), (b,3), (c,3)\}$
$R^{-1} = \{(1,a), (3,a), (3,b), (3,c)\}$

ফলন · function / mapping ·

সংজ্ঞা : ধৰা হ'ল A আৰু B দুটা সংহতি আৰু f, A সংহতি দুটাৰ মাজত এনে এটা সম্বন্ধ যাতে A সংহতিৰ প্ৰতিটো মৌল a ৰ লগত B সংহতিৰ এটা নিৰ্দিষ্ট মৌল b জড়িত কৰিব পাৰি, তেন্তে f সম্বন্ধটোক A সংহতিৰ পৰা B সংহতিলৈ এটা ফলন বুলি কোৱা হয় আৰু প্ৰতিক্ষেত্ৰে $f: A \rightarrow B$ বুলি বুজোৱা হয়।

b মৌলটোক a মৌলৰ প্ৰতিবিম্ব (image) বোলে আৰু $f(a) = b$ হিচাপে লিখা হয়। a ক b ৰ আদিমৌল বা (pre-image) বোলা হয়। A সংহতিক f মানচিত্ৰণৰ আদিক্ষেত্ৰ (domain) আৰু B সংহতিক f মানচিত্ৰণৰ সহক্ষেত্ৰ (codomain) বোলা হয়। f মানচিত্ৰৰ প্ৰতিবিম্বসমূহৰে গঠিত B ৰ উপসংহতিটোক f মানচিত্ৰণৰ পৰিসৰ (range) বুলি কোৱা হয়।



(আচ্ছাদক কিন্তু একৈকী নহয়)

Def^n 5. A function $f: X \rightarrow Y$ is said to be ~~one~~
এটা ফলন $f: X \rightarrow Y$ ক একৈকী (one-one) ফলন বুলি কোৱা হয় যদি $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Def^n 6. এটা ফলন $f: X \rightarrow Y$ ক আচ্ছাদক (onto) ফলন বুলি কোৱা হয় যদি Y সংহতিৰ প্ৰতিটো মৌলই X সংহতিৰ কোনো এটা মৌলৰ প্ৰতিবিম্ব (image).

ও পৰৰ ফলনটো $A = \{1, -1, -i, i\}$ (1 ৰ চতুৰ্থঘাতৰ মূল) আৰু $B = \{1, -1\}$. $f(1) = 1$, $f(-1) = 1$, $f(i) = -1$, $f(-i) = -1$

Note onto ফলনৰ সংজ্ঞা এনেদৰেও দিয়া যায় :
$f: X \rightarrow Y$ আচ্ছাদক যদি f ৰ পৰিসৰ $= Y$.

Def^n 7 যদি $f: X \rightarrow Y$ ফলনটো একৈকী আৰু আচ্ছাদক হয় তেন্তে f ক bijective ( ) বা invertible (প্ৰতিলোমনীয়) বোলা হয়।

~~Def~~^n: যদি $f: X \rightarrow Y$ ফলনটো একৈকী আৰু আচ্ছাদক হয় তেন্তে $f: Y \rightarrow X$ ফলনটো পোৱা যায়। ইয়াক f ফলনৰ বিপৰীত ফলন বা প্ৰতিলোম বোলে।

15.

Ex তলত সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা মানচিত্ৰটোৰ প্ৰতিলোম আছেনে পৰীক্ষা কৰা।

$$f : R \to R^+$$
$$f(x) = e^x$$

$R^+ \to$ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি।

Soln.

ধৰা হ'ল $f(x_1) = f(x_2)$ $\quad x_1, x_2 \in R$

$\Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$.

$\therefore$ f একৈকী

[এনেদৰেও চাব পাৰা:
$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow e^{x_1} \neq e^{x_2} \Rightarrow x_1 \neq x_2$]

[আচ্ছাদকৰ পৰীক্ষাৰ বাবে আমি R^+ সংহতিৰ সকলো মৌলবোৰৰ বিপৰীতে R সংহতিত মৌল থকা যুক্তি দেখুৱাব লাগিব / অথবা দেখুৱাব লাগিব যে f ৰ পৰিসৰ $= R^+$]

ধৰা হ'ল $y \in R^+$

$\Rightarrow y = f(x) = e^x$

$\Rightarrow \log_e y = x \in R$. $\therefore$ ~~$f(\log_e y) = y$~~

[যিহেতু $\log_e y$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা, আমি পালো $y \in R^+$ হ'লে R সংহতিত এটা মৌল ~~x~~ $\log_e y = x$ পোৱা যায় যাতে $f(x) = y$.]

$\therefore$ f টো আচ্ছাদক।

$\therefore$ f টো একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলন।

$\Rightarrow f^{-1}$ বৰ্তে।

Ex1 $f : N \to N$ যাতে $f(x) = 2x$ ফলনটো একৈকী আৰু আচ্ছাদক হয়নে পৰীক্ষা কৰা।

Soln. ধৰা হ'ল x_1, x_2 দুটা ~~মিত্ৰৰ~~ স্বাভাৱিক সংখ্যা যাতে $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ f ফলনটো একৈকী।

আকৌ, $1 \in N$ ল'লে এনে কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা x পোৱা নাযায় যাতে

$f(x) = 1$.

$\therefore$ f ফলনটো আচ্ছাদক নহয়।

$f(\frac{1}{2}) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

কিন্তু $\frac{1}{2} \notin N$

Ex.2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ যাতে $f(x) = 2x$ ফলনটো একৈকী আৰু আচ্ছাদক হ'ব। কাৰণ এইক্ষেত্ৰত $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ পোৱা যাব যাতে

$f(\frac{1}{2}) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$. ~~অৰ্থাৎ x অৰ্থাৎ~~

Note: সংহতিৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি ফলনৰ প্ৰকাৰভেদ সলনি হয়।

অৰ্থাৎ $x \in N$ হ'লে আমি এটা $y \in N$ পাম যাতে $f(y) = x$.

$\therefore f : R \to R$ আচ্ছাদক।

~~প্ৰতিক্ষে~~ গতিকে Ex 2 ক আমি তলত দিয়া ধৰণে সমাধান কৰিব পাৰোঁ:

Ex 2. দেখুওৱা যে $f : R \to R$ যাতে $f(x) = 2x$ এটা একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলন।

Soln f টো 1-1: $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$.

f টো আচ্ছাদক: ধৰো $y \in \mathbb{R}$, তেন্তে $x = \frac{y}{2} \in R$ পোৱা যাব যাতে $f(\frac{y}{2}) = y$ অৰ্থাৎ $f(x) = y$.

প্ৰ. $f: Q \to Q$ যাতে $f(x) = 2x-3$ ফলনটো 1-1 আৰু onto

Soln: $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x-3 = 2y-3$

$\Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$

অৰ্থাৎ, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ সকলো $x, y \in Q$ ৰ বাবে

∴ ফলনটো একৈকী

ধৰা হ'ল y, Q ৰ যিকোনো এটা মৌল।

এতিয়া $f(x) = y$

$\Rightarrow 2x - 3 = y$

$\Rightarrow x = \frac{y+3}{2}$

যিহেতু $\frac{y+3}{2} \in Q$, গতিকে $x \in Q$.

গতিকে সকলো $y \in Q$ (সহক্ষেত্ৰ) ৰ বিপৰীতে এটা $x \in Q$ (আদিক্ষেত্ৰ) পোৱা যায় যাতে

$f(x) = y$.

∴ f টো onto ফলন।