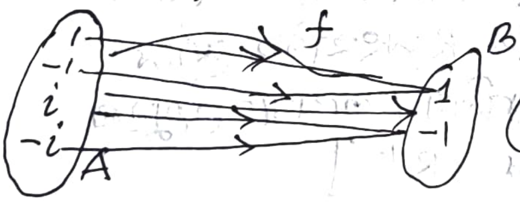
ফলন · function / mapping ।

সংজ্ঞা : ধৰা হ'ল A আৰু B দুটা সংহতি আৰু f, সংহতি দুটাৰ মাজত এনে এটা সম্বন্ধ যাতে A সংহতিৰ প্ৰতিটো মৌল a ৰ লগত B সংহতিৰ এটা নিৰ্দিষ্ট মৌল b জড়িত কৰিব পাৰি, তেন্তে f সম্বন্ধটোক A সংহতিৰ পৰা B সংহতিলৈ এটা ফলন বুলি কোৱা হয় আৰু প্ৰতিক্ষেত্ৰে $f: A \to B$. বুলি বুজোৱা হয়।

b মৌলটোক a মৌলৰ প্ৰতিবিম্ব (image) বোলে আৰু $f(a) = b$ হিচাপে লিখা হয়। a ক b ৰ আদিমৌল বা (pre-image) বোলা হয়। A সংহতিক f মানচিত্ৰণৰ আদিক্ষেত্ৰ (domain) আৰু B সংহতিক f মানচিত্ৰণৰ সহক্ষেত্ৰ (codomain) বোলা হয়। f মানচিত্ৰৰ প্ৰতিবিম্বসমূহৰে গঠিত B ৰ উপসংহতিটোক f মানচিত্ৰণৰ পৰিসৰ (range) বুলি কোৱা হয়।



(আচ্ছাদক কিন্তু একৈকী নহয়)

Defn 5. A function $f: X \to Y$ is said to be ~~one~~
এটা ফলন $f: X \to Y$ ক একৈকী (one - one) ফলন বুলি কোৱা হয় যদি $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Defn 6. এটা ফলন $f: X \to Y$ ক আচ্ছাদক (onto) ফলন বুলি কোৱা হয় যদি Y সংহতিৰ প্ৰতিটো মৌলই X সংহতিৰ কোনো এটা মৌলৰ প্ৰতিবিম্ব (image).

ও পৰৰ ফলনটো $A = \{1, -1, -i, i\}$ (1 ৰ চতুৰ্থঘাতৰ মূল) আৰু $B = \{1, -1\}$. $f(1) = 1$, $f(-1) = 1$, $f(i) = -1$, $f(-i) = -1$

Note onto ফলনৰ সংজ্ঞা এনেদৰেও দিয়া যায় :
$f: X \to Y$ আচ্ছাদক যদি f ৰ পৰিসৰ $= Y$.

Defn 7 যদি $f: X \to Y$ ফলনটো একৈকী আৰু আচ্ছাদক হয় তেন্তে f ক bijective ( ) বা invertible (প্ৰতিলোমনীয়) বোলা হয়।

Defn: যদি $f: X \to Y$ ফলনটো একৈকী আৰু আচ্ছাদক হয় তেন্তে $f^{-1}: Y \to X$ ফলনটো পোৱা যায়। ইয়াক f ফলনৰ বিপৰীত ফলন বা প্ৰতিলোম বোলে।

Ex তলত সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা মানচিত্ৰটোৰ প্ৰতিলোম আছেনে পৰীক্ষা কৰা।

$$f: R \to R^+$$
$$f(x) = e^x$$

$R^+ \to$ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি।

Soln.

ধৰা হ'ল $f(x_1) = f(x_2)$ $\quad x_1, x_2 \in R$

$\Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$.

$\therefore$ f একৈকী

[এনেদৰেও চাব পাৰা:
$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow e^{x_1} \neq e^{x_2} \Rightarrow x_1 \neq x_2$]

[আচ্ছাদকৰ পৰীক্ষাৰ বাবে আমি R^+ সংহতিৰ সকলো মৌলবোৰৰ বিপৰীতে R সংহতিত মৌল থকা বুলি দেখুৱাব লাগিব / অথবা দেখুৱাব লাগিব যে f ৰ পৰিসৰ $= R^+$]

ধৰা হ'ল $y \in R^+$

$\Rightarrow y = f(x) = e^x$

$\Rightarrow \log_e y = x \in R$ $\therefore$ ~~$f(\log_e y) = y$~~.

দিয়া কথাখিনি বুজাব বিচাৰিছে

[যিহেতু $\log_e y$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা, আমি পালো $y \in R^+$ হ'লে R সংহতিত এটা মৌল ~~x~~ $\log_e y = x$ পোৱা যায় যাতে $f(x) = y$.]

$\therefore$ f টো আচ্ছাদক।

$\therefore$ f টো একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলন।

$\Rightarrow f^{-1}$ বৰ্তে।

Ex। $f: N \to N$ যাতে $f(x) = 2x$ ফলনটো একৈকী আৰু আচ্ছাদক হয়নে পৰীক্ষা কৰা।

Sol^n. ধৰা হ'ল x_1, x_2 দুটা ~~বিভিন্ন~~ স্বাভাৱিক সংখ্যা যাতে $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

∴ f ফলনটো একৈকী।

আকৌ, $1 \in N$ ল'লে এনে কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা x পোৱা নাযায় যাতে

$$f(x) = 1.$$

∴ f ফলনটো আচ্ছাদক নহয়।

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} =$
কিন্তু $\frac{1}{2} \notin N$

Ex 2. f : ... যাতে $f(x) = 2x$

সমাধান কৰিব পাৰোঁ।

Ex 2. দেখুওৱা যে $f: R \rightarrow R$ যাতে $f(x) = 2x$ এটা একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলন।

Soln f হৈছে 1-1 :- $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2.$$

f হৈছে আচ্ছাদক :- ধৰো $y \in \mathbb{R}$, তেন্তে $x = y/2 \in R$ পোৱা যাব যাতে $f(y/2) = y$ অৰ্থাৎ $f(x) = y$.

Ex. $f: Q \to Q$ যাতে $f(x) = 2x-3$ ফলনটো 1-1 আৰু onto

Soln $f(x)=f(y) \Rightarrow 2x-3=2y-3$

$\Rightarrow 2x=2y \Rightarrow x=y$

অৰ্থাৎ, $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$ সকলো $x, y \in Q$ ৰ বাবে-

$\therefore$ ফলনটো একৈকী

ধৰা হ'ল y, Q ৰ যিকোনো এটা মৌল।

এতিয়া $f(x) = y$

$\Rightarrow 2x-3 = y$

$\Rightarrow x = \frac{y+3}{2}$

যিহেতু $\frac{y+3}{2} \in Q$, গতিকে $x \in Q$.

গতিকে সকলো $y \in Q$ (সহক্ষেত্ৰ) ৰ বিপৰীতে এটা $x \in Q$ (আদিক্ষেত্ৰ) পোৱা যায় যাতে

$f(x) = y$.

$\therefore$ f টো onto ফলন।

কেইটামান জটিল অংক:

Ex. এটা ফলন f ৰ সংজ্ঞা এনে ধৰণৰ:

$$f: R \to \{x \in R: -1 < x < 1\}$$

যাতে $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $x \in R$

ফলনটো একৈকী আৰু আচ্ছাদক হয়নে পৰীক্ষা কৰা।

Soln ইয়াত আদিক্ষেত্ৰ বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি আৰু সহক্ষেত্ৰ হ'ল -1 আৰু 1 ৰ মাজত থকা সকলো বাস্তৱ সংখ্যা।

আমি পাওঁ

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{if } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

অংকটো দুটা ভাগত কৰিব লাগিব—

Case1: যেতিয়া $x \geq 0$,

$f(x) = \frac{x}{1+x}$. ~~এতিয়া f(x) = f(y)~~

এতিয়া $f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$, $x \geq 0, y \geq 0$.

$\Rightarrow x + xy = y + xy \Rightarrow x = y$

∴ f ফলনটো 1-1.

$\boxed{(-1,0] \cup [0,1) = (-1,1)}$.

আকৌ $f(x) = \frac{x}{1+x} \geq 0$ ($\because x \geq 0$)

∴ x ৰ সকলো ধনাত্মক মানৰ বাবে $f(x) < 1$

∴ $0 \leq f < 1$.

ধৰা হ'ল $y \in [0,1)$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা (ইয়াত [0,1) য়ে বুজাইছে যে 0 টো অন্তৰ্ভুক্ত আছে কিন্তু 1 টো অন্তৰালৰ বাহিৰত)

$f(x) = y \Rightarrow \frac{x}{1+x} = y = \frac{y}{1-y}$

দেখা যায় যে $y \in [0,1)$ হ'লে $1-y$ এটা ধনাত্মক সংখ্যা।
যেনে $\frac{y}{1-y}$ এটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা। অৰ্থাৎ $x \in R^+$.

∴ $[0,1)$ ত থকা সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ বিপৰীতে এটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা x পোৱা যায় যাতে $f(x) = y$.

∴ f এটা আচ্ছাদক ফলন (মন কৰিবা যে x ৰ মানবোৰে [0,1] ৰ মাজতে থাকে, ভগ্নাংশ)

Case2. যেতিয়া $x < 0$

$f(x) = \frac{x}{1-x}$.

ধৰো $x, y \in R$ s.t. $x < 0, y < 0$

$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x - xy = y - xy$

$\Rightarrow x = y$

∴ ফলনটো একৈকী

আকৌ $f(x) = \frac{x}{1-x} < 0$ (∵ x টো ঋণাত্মক)

আৰু $f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x} > -1$ (∵ $\frac{1}{1-x}$ ধনাত্মক) (ইয়াৰ মান $-\frac{1}{2}$ জাতীয় কিবা এটা বহুতেই হোৱা).

∴ $-1 < f(x) < 0$

ধৰো $y \in (-1,0)$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা যাতে $f(x) = y$.

$\Rightarrow \frac{x}{1-x} = y \Rightarrow x = \frac{y}{1+y}$ য'ত x ঋণাত্মক যিহেতু $y \in (-1,0)$

∴ সকলো $y \in (-1,0)$ ৰ বাবে এটা বাস্তৱ সংখ্যা
$x = \frac{y}{1+y}$ থাকে যাতে $f(x) = y$.

∴ f টো আচ্ছাদক।

~~$f: (-1,1) \to f: R$~~

∴ $f: (-1,0) \to (-1,0)$ এটা আচ্ছাদক ফলন

$\Rightarrow$ $f: R \to \{x \in R \mid -1 < x < 1\}$ এটা 1-1 আৰু আচ্ছাদক ফলন।

টান আছে

Ans

Q. দেখুওৱা যে $f: R \to R$ যাতে $f(x) = x^3 + x$ এটা একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলন।

Solⁿ: $f(x) = f(y)$, $x, y \in R$

$\Rightarrow x^3 + x = y^3 + y$

$\Rightarrow x^3 - y^3 + x - y = 0$

$\Rightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) + (x-y) = 0$

$\Rightarrow (x-y)\{x^2 + xy + y^2 + 1\} = 0$

$\Rightarrow x - y = 0$ $\quad [\because x^2 + xy + y^2 + 1 > 0 \;\; \forall x, y \in R]$

$\Rightarrow x = y$.

Thus $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \;\; \forall x, y \in R$.

∴ f একৈকী ফলন।

ধৰো y যিকোনো এটা বাস্তৱ সংখ্যা (সহক্ষেত্ৰৰ)

∴ $f(x) = y \Rightarrow x^3 + x = y$

$\Rightarrow x^3 + x - y = 0$

আমি জানো যে এটা অযুগ্ম মাত্ৰাৰ (degree) ৰ সমীকৰণৰ কমপক্ষেও এটা বাস্তৱ মূল (বাস্তৱ) থাকে।

∴ y ৰ সকলো মানৰ বাবে $x^3 + x - y = 0$ ৰ এটা বাস্তৱ মূল α (ধৰা) থাকিব যাতে

$\alpha^3 + \alpha - y = 0 \Rightarrow \alpha^3 + \alpha = y \Rightarrow f(\alpha) = y$

∴ $y \in R$ ৰ বাবে $x \in R$ পোৱা যায় যাতে $f(x) = y$.

∴ f আচ্ছাদক।

Ex. Show that $f: N \to N$ defined by

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{if } n \text{ is odd} \\ \frac{n}{2}, & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

is not 1-1.

Soln

$f(1) = \frac{1+1}{2} = 1$ (∵ 1 অযুগ্ম)

$f(2) = \frac{2}{2} = 1$ (∵ 2 যুগ্ম)

∴ $f(1) = 1 = f(2)$ ∴ ~~ফলনটো একৈক~~

∴ ফলনটোত $1, 2 \in N$ আৰু $f(1) = f(2)$ যদিও $1 \neq 2$

∴ একৈকী নহয়।