Ex. Show that $f: N \to N$ defined by

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{if } n \text{ is odd} \\ \frac{n}{2}, & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

is not 1-1.

Soln $f(1) = \frac{1+1}{2} = 1$ (∵ 1 অযুগ্ম)

$f(2) = \frac{2}{2} = 1$ (∵ 2 যুগ্ম)

∴ $f(1) = 1 = f(2)$ ∴ ~~ফলনটো এৰৈকী~~

∴ ফলনটোত $1, 2 \in N$ আৰু $f(1) = f(2)$ যদিও $1 \neq 2$

∴ এৰৈকী নহয়।

— × —

Ex. প্ৰমাণ কৰা যে গৰিষ্ঠ অখণ্ড ফলন $f: R \to R$ যাতে $f(x) = [x]$, ফলনটো এৰৈকী আৰু আচ্ছাদক নহয়।
[মনত কৰা যে $[x]$ য়ে x বা তাতকৈ সৰু আটাইতকৈ ডাঙৰ অখণ্ড সংখ্যাটো সূচায়]

$\left[\frac{1}{2}\right] = 0 = \left[\frac{1}{3}\right]$
$\left[\frac{3}{2}\right] = 1$ ইত্যাদি

Soln $f(x) = 0$ যেতিয়া $x \in [0, 1)$

∴ $f: R \to R$ 1-1 নহয়

আকৌ $f: R \to R$ সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ বিপৰীতে কিছুমান অখণ্ড সংখ্যাহে প্ৰতিবিম্ব হিচাপে পোৱা যায়। সেয়ে সহক্ষেত্ৰ R (যোগফলত) ত থকা বাস্তৱ ভগ্নাংশ সংখ্যাবোৰৰ বিপৰীতে আদিক্ষেত্ৰত আদিমৌল পোৱা নাযায়। অৰ্থাৎ সেইকাৰণে R ৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে বাস্তৱফলৰ R সংহতিত মৌল পোৱা নাযায়।

সেয়ে $f: R \to R$ onto বা আচ্ছাদক নহয়।

OR

(1) ধৰা হ'ল $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in R$ (আদিক্ষেত্ৰৰ বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিত)

∴ ~~$f(1/2) \neq$~~

∴ $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$

কিন্তু সংজ্ঞামতে $f(1/2) = f(1/3) = 0$

∴ ফলনটো এৰৈকী নহয়।

(2) ধৰা হ'ল সহক্ষেত্ৰৰ বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিত $1/2 \in R$, তেন্তে গৰিষ্ঠ অখণ্ড ফলনৰ সংজ্ঞামতে এনে কোনো বাস্তৱ সংখ্যা ~~আদি~~ x আদিক্ষেত্ৰ R ত নাই যাতে $f(x) = 1/2$ হ'ব পাৰে (∴ onto নহয়

Q. দেখাও যে ফলন ~~ফিতেকাশ~~ $f: R \to R$ যাতে $f(x) = |x|$ এককেকী, আচ্ছাদক নয়।

$|x| \to x$ এর পরম মান
$|-2| = 2$
$|2| = 2$

সমাধান: ইয়া যে

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{যেখানে } 0 \le x \\ -x & \text{''} \quad 0 > x \end{cases}$$

(i) আদিক্ষেত্রে $2, -2$ দুটি মৌল নেওয়া হল।
এখানে $f(2) = 2$
$f(-2) = -(-2) = 2$.
অর্থাৎ $2 \neq -2$ কিন্তু $f(2) = f(-2)$
$\therefore$ ফলনটি এককেকী নয়।

(ii) আবার ধরা হল সহক্ষেত্রে $-2 \in R$.
আমার পরম মানের সংজ্ঞা অনুসারে আদিক্ষেত্রে এমন কোনো বাস্তব সংখ্যা x পাওয়া যাবে না যাতে $f(x) = |x| = -2$.

$\therefore$ সহক্ষেত্রের ঋণাত্মক বিন্দুর আদিমৌল (pre-image) নাই। $\therefore f$ আচ্ছাদক নয়।

Q. ধরা হল $A = R - \{2\}$, $B = R - \{1\}$
$f: A \to B$ যাতে $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$
ফলনটির এককেকী এবং আচ্ছাদকত্বগুণ পরীক্ষা করো।

সমাধান: ধরো $x, y \in A$ ($\because x, y$ সংখ্যা দুটি 2 ভিন্ন বাস্তব সংখ্যা)
$f(x) = f(y)$
$\Rightarrow \frac{x-1}{x-2} = \frac{y-1}{y-2}$
$\Rightarrow (x-1)(y-2) = (x-2)(y-1)$
$\Rightarrow xy - 2x - y + \cancel{2} = xy - x - 2y + \cancel{2}$
$\Rightarrow -2x - y = x - 2y$
$-3x - 3y = 0 \Rightarrow x = y$.
$\therefore f$ ফলনটি 1-1.

ধৰো $y \in B$ (y, 1 ভিন্ন বাস্তৱ সংখ্যা)

ধৰো $x \in A$ এনেকুৱা যাতে $f(x) = y$

$\Rightarrow \frac{x-1}{x-2} = y$

$\Rightarrow y(x-2) = x-1$

$\Rightarrow x = \frac{1-2y}{1-y}$

স্পষ্টভাৱে x, $y(\neq 1)$ ৰ সকলো মানৰ বাবে এটা বাস্তৱ সংখ্যা।

আৰু $\frac{1-2y}{1-y} \neq 2$ কাৰণ $\frac{1-2y}{1-y} = 2 \Rightarrow 1-2y = 2-2y$

$\Rightarrow 1 = 2$ (অসম্ভৱ).

$\therefore$ $y \in B$ ৰ বিপৰীতে $x \in A$ পোৱা যায় যাতে $f(x) = y$.

$\therefore$ $f: A \to B$ আচ্ছাদক।

Ex $f: R \to R$ যাতে $f(x) = \cos x$ ফলনটো একৈকী /আচ্ছাদক নহয়।

(1) ~~$f(x) = f(y)$~~ $f(0) = \cos 0 = 1$

$f(2\pi) = \cos 2\pi = 1$

কিন্তু $0 \neq 2\pi$

$\therefore$ ফলনটো 1-1 নহয়।

(2) ফলন এটা আচ্ছাদক হ'বলৈ ~~সহক্ষেত্ৰ~~ সহক্ষেত্ৰ আৰু f ৰ পৰিসৰ একে হ'ব লাগে।

ফলন f ৰ সহক্ষেত্ৰ বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি R

আৰু f ৰ পৰিসৰ -1 আৰু +1 ৰ মাজত থাকে। $\therefore$ পৰিসৰ $\neq$ সহক্ষেত্ৰ

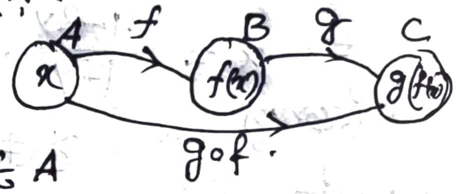
$\therefore$ ফলনটো আচ্ছাদক নহয়।

ফলনৰ পূৰণ

Comosition of functions
(ফলনৰ পূৰণ)

Definition:- ধৰা হওঁক $f: A \to B$ আৰু $g: B \to C$ দুটা ফলন। তেনেহ'লে f আৰু g ৰ পূৰণক $g \circ f$ হিচাপে লিখা হয় আৰু তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হয়:

$(g \circ f): A \longrightarrow C$ যাতে

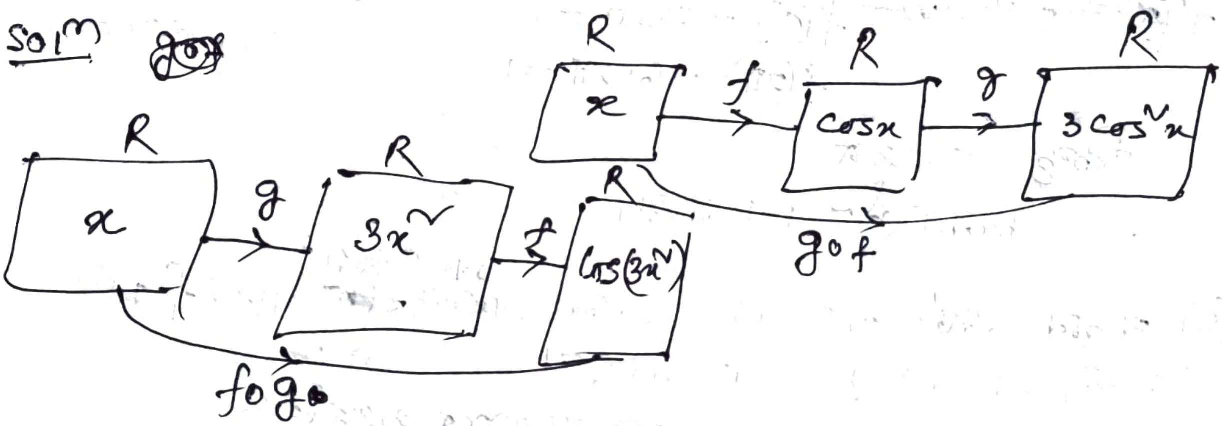


$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A$$

~~একেদৰে $g: B \to C$ আৰু $f: A \to B$ ৰ পূৰণক $(f \circ g)$ হিচাপে লিখা হয় আৰু $(f \circ g): B \to$~~
~~$(f \circ g)(y) = f(g(y))$~~

উদাহৰণ: $f: R \to R$ ৰ সংজ্ঞা $f(x) = \cos x$
$g: R \to R$ " " $g(x) = 3x^2$ হ'লে
$f \circ g$ আৰু $g \circ f$ উলিওৱা।

Soln



Soln $g \circ f: R \longrightarrow R$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\cos x) = 3\cos^2 x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x^2) = \cos(3x^2)$$

দেখা গ'ল যে $g \circ f \neq f \circ g$

Defn Identity map (একক ফলন): A map $I: X \longrightarrow X$ is called an identity map if
$I(x) = x \ \forall x \in X$.

~~Defn- Invertible map :- এটা ফলনক~~ f ক invertible
বা ~~বিপৰীত ফলন বুলি কোৱা হ'ব যদি~~

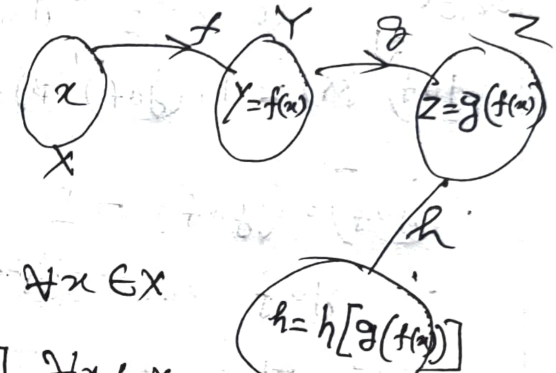
Def^n: একক ফলন : এটা ফলন $I: X \to X$ ক একক ফলন বুলি কোৱা হ'ব যদিহে $I(x) = x \;\; \forall x \in X$.

Def^n: এটা ফলন $f: X \to Y$ ক বিপৰীত ফলন যুক্ত বুলি বা প্ৰতিলোমনীয় বুলি কোৱা হয় যদি এটা ফলন $g: Y \to X$ পোৱা যায় যাতে $g \circ f = I_X$ and $f \circ g = I_Y$. (I_X মানে $I: X \to X$ একক ফলন বুলি বুজিব লাগিব)

f বিপৰীত ফলন যুক্ত (invertible) হ'ব যদি ই- এৰৈকী আৰু আচ্ছাদক হয়।

Theorem 1: যদি $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ আৰু $h: Z \to S$ তিনিটা ফলন হয়, তেন্তে

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$



Proof we have

$$h \circ (g \circ f)(x) = h[(g \circ f)(x)] = h[g(f(x))] \;\; \forall x \in X$$

$$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)\, f(x) = h[g(f(x))] \;\; \forall x \in X$$

অৰ্থাৎ $h \circ (g \circ f)(x) = (h \circ g) \circ f(x) \;\; \forall x \in X$

$$\Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$ প্ৰমাণিত হ'ল।

Ex Consider $f: \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$
$g: \{a,b,c\} \to (\alpha, \beta, \gamma)$

যাতে, $f(1) = a,\; f(2) = b,\; f(3) = c$
$g(a) = \alpha,\; g(b) = \beta,\; g(c) = \gamma$

এতিয়া দেখুওৱা যে f, g আৰু $g \circ f$ invertible (~~বিপৰীত ফলনযু~~ প্ৰতিলোমনীয়)
দেখুওৱা যে $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Proof: সংজ্ঞাৰ পৰা স্পষ্ট যে f আৰু g এৰৈকী, আচ্ছাদক। গতিকে f, g প্ৰতিলোমনীয়।
$\therefore f^{-1}$ আৰু g^{-1} বৰ্তে।
ধৰাহ'ল, $f^{-1}(a) = 1,\; f^{-1}(b) = 2,\; f^{-1}(c) = 3;\; g^{-1}(\alpha) = a,\; g^{-1}(\beta) = b,\; g^{-1}(\gamma) = c$

এতিয়া ~~$(g \circ f^{-1})(a) = g^{-1}(f^{-1}(a)) = g^{-1}(1) =$~~

$$(f^{-1} \circ f)(1) = f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(a) = 1 = I(1).$$

তেনেদৰে $(f^{-1}of)(2) = I(2)$, $(f^{-1}of)(3) = I(3)$.

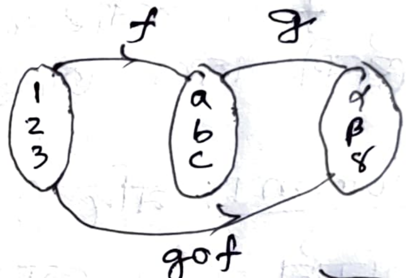
অৰ্থাৎ $f^{-1}of = I$, আদিক্ষেত্ৰ $(1,2,3)$

একেদৰে $fof^{-1} = I$, আদিক্ষেত্ৰ (a,b,c)

$g^{-1}og = I$, আদিক্ষেত্ৰ (a,b,c)

$gog^{-1} = I$,, (α,β,γ)

∴ f^{-1} আৰু g^{-1} ফলন দুটা প্ৰতিলোমনীয়।

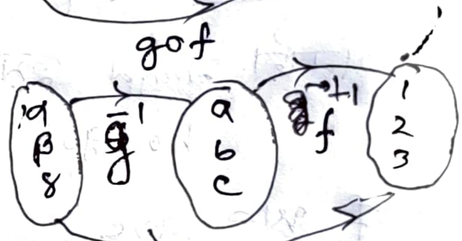


আকৌ, $(gof)(1) = g(f(1)) = g(a) = \alpha$

$(gof)(2) = g(f(2)) = g(b) = \beta$

$(gof)(3) = g(f(3)) = g(c) = \gamma$.

অতঃ



$(gof)^{-1}(\alpha) = 1$, $(gof)^{-1}(\beta) = 2$, $(gof)^{-1}(\gamma) = 3$

∴ $(gof)^{-1}\circ(gof) = I$

∴ gof ফলনটো বিপৰীত ফলন যুক্ত। $f^{-1}og^{-1}$

আকৌ, $f^{-1}g^{-1}(\alpha) = f^{-1}(g^{-1}(\alpha)) = f^{-1}(a) = 1$

$f^{-1}g^{-1}(\beta) = f^{-1}(g^{-1}(\beta)) = f^{-1}(b) = 2$

$f^{-1}g^{-1}(\gamma) = f^{-1}(g^{-1}(\gamma)) = f^{-1}(c) = 3$

∴ $f^{-1}\cdot g^{-1} : \{\alpha,\beta,\gamma\} \to \{1,2,3\}$ যাতে

$(f^{-1}og^{-1})(\alpha) = 1$, $(f^{-1}og^{-1})(\beta) = 2$, $(f^{-1}og^{-1})(\gamma) = 3$.

∴ $f^{-1}og^{-1} = (gof)^{-1}$.

ওপৰোক্ত ফলাফল সাধাৰণ ক্ষেত্ৰতো খাটে।

Ex. ধৰা হ'ল $f: X \to Y$ আৰু $g: Y \to Z$ দুটা বিপৰীত ফলন যুক্ত ফলন। তেনেহ'লে gof ও প্ৰতিলোমনীয় আৰু $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.

Soln. আমি দেখুৱাব লাগে যে

$$(f^{-1}og^{-1})\circ(gof) = I_X \text{ আৰু } (gof)\circ(f^{-1}g^{-1}) = I_Z$$

$$(f^{-1}og^{-1})\circ(gof) = ((f^{-1}og^{-1})\circ g)of$$
$$= (f^{-1}o(g^{-1}og))of$$
$$= (f^{-1}oI_Y)of$$

$= f^{-1} \circ f$

$= I_X$

একেদৰে দেখুৱাব পাৰি যে $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = I_Z$

প্ৰশ্ন $f: U \to V$; $g: V \to X$, $h: X \to Y$ হ'লে

(a) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

(b) f আৰু g একৈকী হ'লে $g \circ f$ ও একৈকী

(c) f " g আচ্ছাদক হ'লে $g \circ f$ ও আচ্ছাদক

(d) $I_u: U \to U$ আৰু $I_v: V \to V$ একক ফলন হ'লে $f \circ I_u = f$; $I_v \circ f = f$.

Proof অংশবোৰ পাৰা,

$[(h \circ g) \circ f](u) = h[(g \circ f)(u)] = h[g(f(u))]$

Also, $[h \circ (g \circ f)](u) = (h \circ g)(f(u)) = h[g(f(u))]$

$\therefore ((h \circ g) \circ f)(u) = [h \circ (g \circ f)](u) \quad \forall u \in U$

$\therefore (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

(b) ধৰো $u_1, u_2 \in U$

$(g \circ f)(u_1) = (g \circ f)(u_2)$

$\Rightarrow g(f(u_1)) = g(f(u_2))$

$\Rightarrow f(u_1) = f(u_2) \quad (\because g$ টো 1-1)

$\Rightarrow u_1 = u_2 \quad (\because f$ " 1-1)

$\therefore g \circ f$ ফলনটো একৈকী।

(c) [$g \circ f$ ক আচ্ছাদক বুলি দেখাবলৈ হ'লে আমি X ৰ প্ৰতিটো মৌলৰ বিপৰীতে U ত এটা মৌল পাব লাগিব যাতে ফলন $g \circ f$ ৰ বাবে X ৰ মৌলটো U ৰ মৌলৰ এটা প্ৰতিবিম্ব।]

ধৰা হ'ল $x \in X$, X ৰ যিকোনো মৌল। যিহেতু g ফলনটো আচ্ছাদক, V ত এটা মৌল v পোৱা যাব যাতে $g(v) = x$.

এতিয়া $f: U \to V$ আচ্ছাদক। সেয়ে V ৰ প্ৰতিটো-মৌল v ৰ বাবে U ত এটা মৌল u পোৱা যাব যাতে $f(u) = v$.

$$\therefore (g\circ f)(u) = g(f(u)) = g(v) = x.$$

অৰ্থাৎ X ৰ প্ৰতিটো মৌল x ৰ বিপৰীতে $u \in U$ পোৱা যাব যাতে $(g\circ f)(u) = x$. $\therefore g\circ f$ Onto.

$\therefore$ $g\circ f$ আচ্ছাদক।

(d) ধৰো $u \in U$, যিহেতু I_U একক ফলন,

$$I_U(u) = u \Rightarrow f[I_U(u)] = f(u)$$

$$\Rightarrow (f\circ I_U)(u) = f(u) \quad \forall u \in U$$

$$\Rightarrow f\circ I_U = f.$$

Also, $f(u) \in V$ আৰু I_V, V সংহতিৰ ওপৰত একক ফলন

$$\therefore I_V(f(u)) = f(u) \quad \forall u \in U$$

$$\Rightarrow (I_V\circ f)(u) = f(u) \quad \forall u \in U$$

$$\Rightarrow I_V\circ f = f.$$

Proved

Note (b) আৰু (c) ৰ পৰা পাওঁ যে $g\circ f$ ফলনটো একৈকী আৰু আচ্ছাদক। গতিকে প্ৰতিলোমনীয়।