Thm $f: U \to V$; $g: V \to X$, $h: X \to Y$ হ'লে

(a) $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$

(b) $f$ আৰু $g$ এককৈকী হ'লে $g\circ f$ ও এককৈকী

(c) $f$ " $g$ আচ্ছাদক হ'লে $g\circ f$ ও আচ্ছাদক

(d) ~~যদি~~ $I_U: U\to U$ আৰু $I_V: V\to V$ ~~একৈক~~ একক ফলন হ'লে $f\circ I_U = f$; $I_V\circ f = f$.

Proof: অংশভাৱৰ পৰা,

$[(h\circ g)\circ f](u) = h[(g\circ f)(u)] = h[g(f(u))]$

Also, $[h\circ(g\circ f)](u) = (h\circ g)(f(u)) = h[g(f(u))]$

$\therefore ((h\circ g)\circ f)(u) = [h\circ(g\circ f)](u) \quad \forall u \in U$

$\therefore (h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$.

(b) ধৰোঁ $u_1, u_2 \in U$

$(g\circ f)(u_1) = (g\circ f)(u_2)$

$\Rightarrow g(f(u_1)) = g(f(u_2))$

$\Rightarrow f(u_1) = f(u_2)$ ($\because$ $g$ টো 1-1)

$\Rightarrow u_1 = u_2$ ($\because$ $f$ " 1-1)

$\therefore$ $g\circ f$ ফলনটো এককৈকী।

(c) [$g\circ f$ ক আচ্ছাদক বুলি দেখুৱাবলৈ হ'লে আমি $X$ ৰ প্ৰতিটো মৌলৰ বিপৰীতে $U$ ত এটা মৌল পাব লাগিব যাতে ফলন $g\circ f$ ৰ বাবে $X$ ৰ মৌলটো $U$ ৰ মৌলৰ এটা প্ৰতিবিম্ব।]

ধৰা হ'ল $x \in X$, $X$ ৰ যিকোনো মৌল। যিহেতু $g$ ফলনটো আচ্ছাদক, $V$ ত এটা মৌল $v$ পোৱা যাব যাতে $g(v) = x$.

এতিয়া $f : U \to V$ আচ্ছাদক। যেয়ে $V$ ৰ প্ৰতিটো-মৌল $v$ ৰ বাবে $U$ ত এটা মৌল $u$ পোৱা যাব যাতে $f(u) = v$.

$$\therefore (g \circ f)(u) = g(f(u)) = g(v) = x.$$

অৰ্থাৎ $X$ ৰ প্ৰতিটো মৌল $x$ ৰ বিপৰীতে $u \in U$ পোৱা যাব যাতে $(g \circ f)(u) = x$. $\therefore g \circ f$ Onto.

$\therefore$ $g \circ f$ আচ্ছাদক।

(d) ধৰো $u \in U$, যিহেতু $I_U$ একক ফলন,

$$I_U(u) = u \Rightarrow f[I_U(u)] = f(u)$$
$$\Rightarrow (f \circ I_U)(u) = f(u) \quad \forall u \in U$$
$$\Rightarrow f \circ I_U = f.$$

Also, $f(u) \in V$ আৰু $I_V$, $V$ সংহতিৰ ওপৰত একক ফলন

$$\therefore I_V(f(u)) = f(u) \quad \forall u \in U$$
$$\Rightarrow (I_V \circ f)(u) = f(u) \quad \forall u \in U$$
$$\Rightarrow I_V \circ f = f.$$

Proved

Note (b) আৰু (c) ৰ পৰা পাওঁ যে $g \circ f$ ফলনটো একৈকী আৰু আচ্ছাদক। গতিকে প্ৰতিলোমনীয়।

Example: ধৰা হ'ল $f : R \to R$ এটা ফলন যাতে $f(x) = 10x + 7$. এটা ফলন $g : R \to R$ উলিওৱা যাতে $g \circ f = f \circ g = I_R$.

Sol$^n$ We have,

$$f \circ g = I_R$$

$$(f \circ g)(x) = I_R(x) \quad \forall x \in R$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = x, \quad \forall x \in R$$

$$\Rightarrow 10g(x) + 7 = x \quad \forall x \in R$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x-7}{10} \quad \forall x \in R$$

ex. ধৰা হ'ল $f: N \to R$ এটা ফলন যাতে $f(x) = 4x^2 + 12x + 5$ ;
দেখুওৱা যে $f: N \to Range(f)$ প্ৰতিলোমনীয়. $f$ ৰ বিপৰীত ফলন $f^{-1}$ নিৰ্ণয় কৰা।


Sol$^n$ (পৰিসৰ বা range ৰ অৰ্থ হ'ল $f$ ৰ প্ৰতিবিম্বৰ সংহতিটো। প্ৰশ্নত $f$ ফলনটো $N$ আৰু তাৰ range ৰ পৰিপ্ৰেক্ষিতত আলোচনা কৰিব দিছে).

(1) $f$ এটা এৰৈকী ~~…~~ ফলন:
ধৰা $f(x) = f(y)$ , $x, y \in N$

$\Rightarrow 4x^2 + 12x + 15 = 4y^2 + 12y + 15$

$\Rightarrow 4(x^2 - y^2) + 12(x - y) = 0$

$\Rightarrow (x-y)\{4x + 4y + 12\} = 0$

$\Rightarrow x - y = 0 \quad (\because 4x + 4y + 3 \neq 0,$ যিহেতু $x, y \in N)$

$\Rightarrow x = y$

$\therefore f: N \to Range(f)$ is 1-1.

(2) $f$ এটা আচ্ছাদক ফলন:-
যিহেতু $f: N \to Range(f)$, সেইভাবে ই এটা onto ফলন.

যিহেতু $f$ টো 1-1 আৰু আচ্ছাদক, ই প্ৰতিলোমনীয়।
অৰ্থাৎ $f^{-1}: Range(f) \to N$ বৰ্তে।

(3) $f^{-1}$ নিৰ্ণয়:-

$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \forall x \in Range(f) \quad [\because f \circ f^{-1} = I]$

$\Rightarrow f(f^{-1}(x)) = x$ for all $x \in Range(f)$

$\Rightarrow 4\{f^{-1}(x)\}^2 + 12\{f^{-1}(x)\} + 15 = x \quad \forall x \in R(f)$

$\Rightarrow 4\{f^{-1}(x)\}^2 + 12f^{-1}(x) + 15 - x = 0$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 4 \times (15 - x)}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{16x - 96}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{x-6}}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-3 + \sqrt{x-6}}{2}$$

[ইয়াত $\pm$ ৰ অকল + লোৱা হৈছে। যিহেতু $f^{-1}(x) \in N$]